THE EFFECTS OF PROBLEM REPRESENTATION ON PROBLEM SOLVING PERFORMANCE

by

Hülya Kılıç

B.S., Secondary School Science and Mathematics Teaching, 2001

Submitted to Graduate Studies in
Science and Engineering in partial fulfillment of
the requirement for the degree of
Master of Science

Graduate Program in Secondary School Science and Mathematics

Boğaziçi University

2005

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to express my gratitude to my thesis advisor, Assoc. Prof. Dilek Ardaç for her endless academic and moral support, patient and guidance throughout my graduate study and the completion of this research. Without her encouragement and enthusiasm this study would be hard deal.

I would like to give my special thanks to Dr. Ayşe Caner for her support and suggestions at all stages of this work. I want to express my special thanks for her valuable comments during the design and application of the study.

I would like to thank the other members of my committee Dr. Özlem Çeziktürk, Prof. Haluk Oral and Assoc. Prof. Ayşenur Yontar Toğrol for their contributions in my study.

I want to express my gratitude to Pembe Yalkın, Serap Livvarcin and Gülşah Keskin for their grateful support and assistance during the application of the study in Eyüboğlu College.

I would like to thank all of the sixth grade students who participated in the study and express my special thanks to ones who spare their lunch time for the interview.

I would like to thank my mother and sister for their endless love and support to overcome the difficulties at every level of my education.

ABSTRACT

THE EFFECTS OF PROBLEM REPRESENTATION ON PROBLEM SOLVING PERFORMANCE

Problem representation is considered to be an important tool in understanding and improving problem solving performance. A major implication emerging from studies on problem solving performance is the higher performance levels observed among students who can successfully represent a given problem. The present study examines performance differences among students as they try to represent a given set of problems that require the use of external representations for successful solution. The study also questions how differences in problem representation (level) may contribute to students' understanding and subsequent problem solving performance following instruction on a topic that invests on the use of external representations (Venn diagrams). The sample of the study consisted of 40 students who were randomly selected from a total of 164 sixth grade students in a private secondary school. The performance on set problems was determined using two groups of tests: 1) Tests on word problems (WPT1 and WPT2) and 2) Retention test on word problems (R-WP). Problem representation was assessed in terms of a semi-structured interview which included two "set problems" one of which was a familiar and typical set problem that could be solved using Venn diagrams, while the second was an unfamiliar problem which could be solved using various representations (including Venn diagrams). Interview data were used to categorize students into poor-average-good representation levels. Performance gains of students in different representational categories were analyzed by examining the pretest, posttest and retention test scores prior to and following an instructional period on "set problems". The results indicated that retention test scores were significantly higher among "good" and "average" representers as compared to "poor" representers. No performance differences were observed between "good", "average" and "poor" representers for pretest and posttest scores. The results imply that differences in the representation levels of the students can affect problem solving performance and this effect is particularly unfavorable for poor representers in the long run.

ÖZET

PROBLEM TEMSİLİNİN PROBLEM ÇÖZME PERFORMANSINA ETKİSİ

Problem temsili, problem çözümünü anlamak ve erişi düzeyini artırmak için önemli bir araç olarak düşünülmektedir. Problem çözme performansına yönelik çalışmalar, verilen bir problemi başarıyla temsil eden öğrencilerin performanslarının daha yüksek olduğunu ortaya koymaktadır. Bu çalışma, başarılı bir çözüm için dışsal temsillerin kullanımını gerektiren problemlerin çözümü sırasında gözlenen öğrenci farklılıklarını incelemektedir. Çalışmada, ayrıca, dışsal temsillerin (Venn şeması) ağırlıklı olarak kullanıldığı bir konunun öğretimi sonrasında, problem temsil etme seviyelerindeki farklılıkların, öğrencilerin problemleri anlama ve çözme düzeyleri üzerindeki etkisi de sorgulanmaktadır. Çalışmanın örneklemini, bir özel okuldaki toplam 164 altıncı sınıf öğrencisinin içinden rasgele seçilen 40 kişi oluşmaktadır. Küme problemlerindeki performans iki grup test ile belirlenmiştir: 1) Sözlü problem testleri (WPT1 ve WPT2) ve 2) Sözlü problem izleme testi (R-WP). Problem temsili, yarı-yapılandırılmış bir mülakatta sorulan iki tane küme problemi ile ölçülmüştür. Problemlerden bir tanesi tanıdık ve Venn şeması kullanılarak çözülebilen tipik bir küme problemi iken ikincisi tanıdık ve tipik olmayan ama Venn şeması da dahil, çeşitli temsillerin kullanılarak çözülebileceği bir problemdir. Mülakat verileri, öğrencileri zayıf-orta-iyi temsil etme seviyelerine göre ayırmak için kullanılmıştır. Farklı temsil seviyelerindeki öğrencilerin performans kazanımları, küme problemlerinin öğretimi öncesinde ve sonrasında yapılan ön test, son test ve izleme testinden aldıkları sonuçlar incelenerek analiz edilmiştir. Ön test ve son test sonuçlarına göre "iyi", "orta" ve "zayıf" temsil düzeyindeki öğrenciler arasında performans farkı ortaya çıkmamıştır. Ancak izleme testinin sonuçları, "iyi" ve "orta" düzeydeki temsilcilerin puanlarının "zayıf" düzeydeki temsilcilerin puanları ile karşılaştırıldığında anlamlı bir şekilde daha yüksek olduğunu ortaya koymaktadır. Sonuçlar, öğrencilerin temsil düzeylerindeki farkların problem çözme başarıları üzerinde etkili olabileceğini ve bu etkinin özellikle uzun dönemde temsil düzeyi düşük öğrencilerin aleyhine olacağını düşündürmektedir.

TABLE OF CONTENTS

LIST OF FIGURES

LIST OF TABLES

LIST OF ABBREVIATIONS

AR	Average representer
d.f	Degree of freedom
GR	Good representer
I	Instructor
M	Mean
N	Number of sample
POST	Test on word problems 2
PR	Poor representer
PRE	Test on word problems 1
R-WP	Retention test on word problems
Rep. Level	Representation level
RETENTION	Retention test on word problems
SD	Standard deviation
sig.	Significant value
WPT	Test on word problems

1. INTRODUCTION

Problem solving ability is not only needed for solving scientific problems but also for helping us to solve psychological or social problems considered to be an important thinking ability that we encounter many times in daily life. Therefore it is one of the important human characteristics that should be improved from the beginning of early childhood. School mathematics and science courses teach about fundamentals of problem solving and provide opportunities to make exercises on those principles. Since problem solving requires higher order thinking skills it seems difficult to comprehend those principles and apply on the questions for secondary school students. Most of the time students complain about difficulty of mathematics since they fail in solving problems. However, there are attempts to make problem solving easier and understandable for students.

Mathematical problem solving performance relates to domain specific and strategic knowledge. However recent studies also point out the role problem plänning plays in determining problem solving expertise. According to literature problem planning precedes or includes problem representation. Problem representation is one of the issues that considered to be one of the keys to make problem solving process more structured and comprehensible for students. It seems to be accepted that success or failure in problem-solving depends on the representations constructed during the understanding of the problem (Moreau and Viennot, 2003).

Problem representation takes place during the planning phase of the problem solving process. Planning is considered to be an important step in problem solving, because it makes the problem more structured and easier to follow the solution strategy so as to enhance understanding.

The present study is an attempt to understand the role of problem representation on problem solving performance. The study concentrates on the use of external representations and planning when students are solving set problems. One most common representation used when solving set problems is drawing Venn diagrams. Therefore this study mainly examines the role of drawing Venn diagrams on students' resulting performance when solving set problems.

2. LITERATURE REVIEW

Research on problem solving in general and mathematical problem solving in particular emphasizes difficulties experienced during the problem solving process as well as how we move from being a novice to being an expert in a particular knowledge domain. These research results are very important in understanding factors explaining problem solving performance. One major implication derived from studies that examine factors underlying successful performance when solving problems in a particular domain seems to be competence in planning and representing the problem. Therefore problem representation emerges as a particularly important research area. The following two sections outline major research studies that examine problem representation and how it might affect the resulting performance.

2.1. Problem Solving Performance and Problem Representation

Problem representation is considered to be an important tool in understanding and improving problem solving performance, therefore, several studies were held to conceptualize and define problem representation.

In general, representation in mathematics refers to a process of construction, abstraction and demonstration of mathematical knowledge (Liutel, 2002). Representations may be thought as internal abstractions of mathematical ideas or cognitive schemata that are developed by a learner through experience and external demonstrations of mathematical concepts that stimulate senses and help the learner understand these concepts (Pape and Tchoshanov, 2001).

Due to its importance in problem solving process and effects on problem solving performance, problem representation should be taught about or conveyed throughout the lessons. Instructions can foster problem representation by supporting and encouraging different types of representations. Theoretical evidence shows two types of representations; external representation and internal representation.

According to Zhang (1997), internal representations are the knowledge and structures in the memory stored as propositions, productions, schemas, neural networks, or other forms. On the other hand, external representations refer to physical symbols, objects, or dimensions and external rules, constraints, or relations embedded in physical configurations. In addition, Zhang (1997) believes that the form of the external representation of problems determines 1) what information can be perceived, 2) what processes can be activated, and 3) what structures can be discovered from the representation.

According to Pape and Tchoshanov, (2001) internal representations include students' personal symbolization, constructs and assignments of meaning to mathematical notations, as well as their natural language, visual imagery and spatial representation, their problem solving strategies and heuristics and their affect in relation to mathematics.

Beyond the general definitions and classification for external and internal representations there are different descriptions for those terms that are identified by different researchers. Jonassen (2003) classifies problem representation as 1) how instructors represent problems to learners in the problem statement, and 2) how problem solvers cognitively represent problems while trying to solve it. Furthermore, as a result of his study Jonassen (2003) concludes that the way an instructor represents problems to learners affects the learner's cognitive representation of the problem.

According to Miura (2003) definitions, examples and models that are taught by the instructor are specified as external representations whereas internal representations are constructed by the students themselves as they try to make sense of a mathematical concept or attempt to find a solution to a problem.

Goldin and Shteingold (2001) identify a third type of representation, namely shared representation. In fact by the term shared representation they mean the interaction between internal and external representations.

Even though external representations seem to be inputs and stimuli to the internal mind (Zhang, 1997), the learners may formulate internal representations to organize mathematical ideas or to solve problems as well as they may produce external representations to maintain the solution process (Pape and Tchoshanov, 2001).

Theoretical studies on the nature of internal and external representations reveal that there exists a mutual influence between two forms of representations. However, some researches claim that there is no difference between external and internal (mental) representations such that a mental representation is equivalent to what it represents (Pape and Tchoshanov, 2001). On the other hand, some researchers believe that there exists a direct relation between the development of students' thinking and their ability to operate with mental images such as imagining and concept mapping. In other words, the use of representations to develop students' understanding is related to their ability to operate with the representations (Pape and Tchoshanov, 2001).

Both external and internal representations are quite important in the problem solving process. There is a mutual relation between internal and external representations during the instruction. The learners are first exposed to external representations and then actual learning occurs when the learner transfers the knowledge into a mental network and constructs its internal representation.

In order to make internal and external representations meaningful in the problem solving process, different strategies for internal and external representations are identified. Diagrams, graphs and pictures are a few typical types of external representations. They are not only used for problem solving but also for reasoning and decision making. In the studies of the relationship between mental images and external pictures, researches found that external pictures can give people access to knowledge and skills that are unavailable from internal representations. In the studies of diagrammatic problem solving, it is found that diagrammatic representations support operators that can recognize features easily and make inferences directly (Zhang, 1997).

The interaction between internal and external representation is fundamental to effective teaching and learning. However both representations must be as accurate as possible before attempting for a successful interaction. Pape and Tchoshanov, (2001) define the term representational thinking to specify the learner's ability to interpret, construct, and operate (communicate) effectively with both forms of representations, external and internal, individually and within social situations.

According to Pirie (1998) the function of any type of representation is to communicate the mathematical ideas through a mathematical language. Ordinary language, mathematical verbal language, symbolic language, visual representation, unspoken but shared assumptions and quasi-mathematical language are the types of that kind of mathematical language. Similarly, Pape and Tchoshanov (2001) share the view that representation has emerged as a part of mathematical communication and that it facilitates both transfer of the knowledge from senses to mental network and meaningful connection within the mental network.

Several studies indicate the importance of problem representation as a major step in the problem solving process. According to Reimann and Chi, (1989) problem solving has to begin with the conversion of the problem statement into an internal representation. Similarly, Szetela and Nicol (1992) considered the representation of the problem as an initial step for successful problem solving. According to Szetela and Nicol (1992) the typical sequence of actions for successful problem solving should be as follows:

1. Obtain an appropriate representation of the problem situation.
2. Consider potentially appropriate strategies.
3. Select and implement a promising solution strategy.
4. Monitor the implementing with respect to problem conditions and goals.
5. Obtain and communicate the desired goals.
6. Evaluate the adequacy and reasonableness of the solution.
7. If the solution is judged family or inadequate, refine the problem representation and proceed with a new strategy or search for procedural or conceptual errors.

Since the problem solving sequence suggested by Szetela and Nicol is basically similar to general problem solution strategies, the emphasis on the importance of representation and solution plan for successful problem solving is outstanding in their sequence.

Moreover, researches on teaching about problem solving reveal a two-step model for resolving problems such as representation and solution (CTE, 2000). Representation of a problem and making a solution plan are two fundamental keys to solve the problem. Representation involves an analysis of the available data and an identification of the type of problem presented and it is aimed to develop students' ability to organize data, identify the key issues, and initiate a solution to the right problem. However a solution plan involves developing and implementing a coherent plan for solving the problem (CTE, 2000).

According to Pape and Wang, (2003) problem solving begins when the solver reads the problem's text such that it stimulates the activation of various knowledge structures, which help the problem representation. Moreover, Pape and Wang, (2003) believe that problem representation is the first stage of problem solving. As being the first step, problem representation may lead to the development of a more complex mental model which is constructed through active transformation of the text base, activation of schemas for particular types of problems, and integration of the problem elements within these schemas. Thus, the representation process relies on both reading comprehension and mathematical problem-solving strategies (Pape and Wang, 2003).

Although problem representation is an important step in successful problem solving, problem representation is not a random process; it has to have well defined stages to be followed. Problem representation strategies are needed to process linguistic and numerical information, comprehend and integrate the information, form internal representations in memory and develop solution plans (Montague and Applegate, 2000).

These strategies facilitate translating and transforming problem information or descriptions that are verbal, graphic, symbolic, and/or quantitative to problem structures. These verbal and visual representations in turn aid for organization and integration of the problem information as the problem solver develops a logical solution plan. In relation, Montague and Applegate (2000) identify a three-step problem representation strategy that includes the following steps:

1. Paraphrase or restate the problem in one's own words.
2. Visualize the problem by drawing pictures, constructing diagrams or charts, and making mental images.
3. Hypothesize or establish goals and set up a plan to solve the problem.

As inferred from the results of the researches on successful problem solving strategies, meaningful representation of a problem is an initial step of a problem solving process such that in turn, it directs the solution plan as well. The reasons that make problem representation more important than a solution plan in problem solving process may be summarized as follows:

1. Representations are powerful tools for thinking since they enable mathematical ideas to be more concrete and available for reflection. Thus, the students are directed to focus on the important features of the problem.
2. Representations help students identify the common mathematical elements of different situations.
3. Different representations of the same idea enhance conceptual understanding and transfer of the knowledge from senses to mental network. Students need to develop and use a wide variety of representations.
4. Representations are effective tools for building understanding, communicating information, and demonstrating reasoning (Greeno and Hall, 1997).

In addition, the recent studies in curriculum development focus on the importance of representation in teaching learning process as being a tool for improving understanding and learning. In the mathematics program suggested by NCTM, the major emphasis is given on the importance of improving students' ability in selection, application and translation among mathematical representation to solve problems. For example, graphic representations is a way of expressing mathematical information visually; whereas expressions represented symbolically can be easier for manipulation, analysis, or transformation of the knowledge (Shaw and Aspinwall, 2002).

2.1.1. Representation as a Major Component in Solving Mathematical Problems

Problem representation is not only one of the keys in general problem solving but also plays a crucial role in solving domain-specific mathematical problems. Even though there are different types of representations for different problems, problem representation is a stable element of the problem solution process.

Jitendra, (2002) believes that problem solution is the selection and application of appropriate mathematical operations based on problem representation which involves both solution planning and execution of mathematical operations. Hohn and Frey (2002) on the other hand, divide the process of understanding and solving word problems into several sequential phases and assert that problem representation takes place during the initial phase. According to Hohn and Frey (2002), the first phase of solving word problems is problem representation, which can be subdivided into two substages as problem translation and problem integration. Problem translation refers to interpretation of factual information in the problem statement while problem integration indicates the formulation of relationships between problem knowledge and problem structure. The next phase is solution planning, in which the problem solver selects a solution procedure and then solution execution follows, such that necessary computations are carried out. During solution monitoring, the problem solver reviews the computations to detect errors, completes the sequence of solving word problems. However, results of the studies revealed that whenever the problem solver fails to effectively engage in the necessary metacognitive activity at any one of these phases a poor problem solving performance is likely to yield (Hohn and Frey, 2002).

Similar work by Hegarty, Mayer and Monk (1995) specify a number of comprehension processes that takes place before the solution plan. Comprehension processes for arithmetic word problems starts with the problem solver constructing a text base, after which the solver extracts a mathematics-specific representation, and develops a solution plan for solving the problem. Construction of text base refers translation of each statement into an internal propositional representation and integration of this internal representation with the representation of other statements in the problem to construct a semantic network representation. In relation, construction of a mathematics-specific representation refers changing the format of problem solvers' representation from a proposition-based to an object-based representation. After these two phases a problem solver is ready to make a solution plan for the problem.

Howard, McGee, Hong and Shia (2000) also point out to the importance of problem representation. They assert that among the five components of metacognitive self-regulation (knowledge of cognition, subtask monitoring, evaluation, problem representation, objectivity) problem representation is significant for problem solving and content understanding. In their experimental studies on the effectiveness of components of metacognitive self regulation they found out that problem representation creates significant difference between control and experiment groups such that problem solving performance and content understanding level of the experiment group is higher than the control group.

2.1.2. Representations as a Predictor of Good / Successful Problem Solving Performance

It seems to be accepted that success or failure in problem solving depends on the representations constructed during the understanding of the problem (Moreau and Viennot, 2003). Even though problem representation is an important tool for understanding and solving problems, individual differences may lead to differences in problem solving performance. Results of several studies that examine the characteristics of good-poor, successful-unsuccessful or expert-novice problem solvers indicate that problem representation plays an important role in determining problem solving performance.

Expert and successful problem solvers initially transform the problem text into a form of a mental model or a cognitive representation that corresponds to the problem elements and their relationships (Pape and Wang, 2003). Problem solvers may evoke internal representations for the problem or they may use external representations to facilitate this process. Then based on the model developed for the problem, the problem solver begins a solution path. However, less successful problem solvers may not form this mental model rather; they prefer to translate the problem elements to a solution without establishing a representation of the problem. Nevertheless transforming the problem text into a situational model, and the situational model into a mathematical model requires a great deal of strategic behavior and monitoring skill (Pape and Wang, 2003).

Similarly, the results of the study explaining individual differences in the comprehension strategies of successful and unsuccessful problem solvers; Hegarty, Mayer and Monk, (1995) deduced that successful problem solvers used problem-model strategies and focus on the variable names in the problem while unsuccessful problem solvers use direct-translation strategy and focus on numbers and relational terms.

Furthermore, Schoenfeld (1987) examined behaviors of both expert and novice problem solvers and found that expert problem solvers analyze the given problem as the first step, then make a solution plan for it and finally take an action to solve the problem, however novice problem solvers do not make a solution plan and try to solve problems through exploration (Pape and Wang, 2003).

In addition, Jonassen (2003) compared the characteristics of expert problem solvers with novice problem solvers as follows:

1. Experts construct richer, more integrated mental representations of problems than do novices.
2. Experts are better able to classify problem types because their representations integrate domain knowledge with problem types.

The good problem solvers use more strategies overall and more problem representation strategies specifically as problems become more difficult (Montague and Applegate, 2000). Montague and Applegate, (2000) studied on middle school students' perceptions of problem difficulty, persistence, and knowledge and use of problem solving strategies in solving mathematical word problems. Results indicated that the most significant deficiency occurs in problem representation processes and strategies such that poor problem solvers failed in solving word problems since they were not good enough to represent problems and develop a solution plan. Moyer, (2001) also agrees on the importance of constructing appropriate problem representations in problem solving situations, and using these representations as aids for understanding the information and relationships of the situation such that expert problem solvers may follow those steps successfully while novice solvers fail in some steps.

Furthermore, studies investigating problem solving behavior of students with learning disabilities (LD) also reveal the importance of representation on problem solving performance. Results of a study held by Maccini, *et al.*, (2000) indicate that adolescent students with LD can successfully learn to represent and solve word problems involving subtraction of integers. Specifically, participants demonstrated remarkable increases in their percentage of strategy use over instructional phases and learned to represent and solve subtraction of word problems involving integers. The improvement was observed in four different categories such that identifying the correct operation(s), drawing a picture of the problem, writing a correct equation, and answering the problem. However, many students with LD exhibit difficulties with problem representation that involves understanding the problem and transforming problem information into algebraic symbols. Some students with LD had difficulty in distinguishing relevant from irrelevant information while others have difficulty representing word problems. Some LD students lacked knowledge of how to solve problem systematically, and often moved directly to calculation omitting aspects critical for correct solution.

Without denying the existence or importance of ability differences in mathematics Goldin and Shteingold (2001) suggest that the limitations in some children's understanding are not intrinsic rather, they are a result of internal systems of representation that are only partially developed, leaving long-term cognitive obstacles and associated affective obstacles.

2.2. Effects of Problem Representation on Problem Comprehension

The role of representation in searching for understanding of mathematics learning is vital because understanding of learning is possible only when the concept, knowledge, formula or principle becomes a part of a learner's network of representation (Hiebert and Carpenter, 1992). Using representations whether drawings, mental images, concrete materials, or equations helps students organize their thinking and try various approaches that may lead to a clearer understanding and a solution (Fennell and Rowan, 2001).

Cognitive research in mathematics learning sometimes emphasizes solution processes such as computational procedures and problem solving strategies (Hegarty, *et al.*, 1995). However construction of problem representations has an effect on problem comprehension such that studies on problem comprehension reveals that most problem solvers fail to understand and solve problems since they have difficulties constructing a useful problem representation than in performing the computations necessary to solve the problem (Hegarty, *et al.*, 1995).

According to Yerushalmy and Gilead, (1999) there are two phases of solution of algebra problems: problem comprehension and equation solving. The problem comprehension phase involves reading the problem, forming a mental representation that interprets the information given in the problem and transforms it into objects with their associated properties, organizing the relations among those objects, and representing the relations by equations which helps shape the mental representations required for the solution.

2.3. Using Venn Diagrams in Solving Mathematics Problems

Using external representations such as diagrams, charts or pictures as an instructional tool aids learning as well as understanding of the concepts. For mathematics lessons using diagrams during problem solving has been shown to be effective (Pyke, 2003). Diagrams enable problem information to be more apparent and facilitate problem comprehension and solution by revealing relationships and suggesting possible routes to solution (Hohn and Frey, 2002).

Although the majority of research on algebraic modeling has emphasized students' difficulties using standard representations, students can solve problems successfully by designing their own algebraic, tabular and graphic representations (Izsak, 2003). Furthermore, diagrams (flowcharts) provide better performance than verbal representations, especially for more complex problems (Jonassen, 2003).

Specifically, using Venn diagrams in set problems is crucial to make the solution of the problem evident for the students. Since word problems with sets includes two or more classifications about facts and a group of numbers, inserting correct numbers into correct places on Venn diagrams will facilitate solution of the problem (Stapel, 2004).

As inferred from the results of the studies on problem solving, one may conclude that problem representation is found to be the initial and one of the most important steps in problem solving process such that solution planning is based on the representation of the problem. The present study examines differences in how sixth grade students represent "set problems" and how their resulting performance can be explained in terms of problem representation.

3. SIGNIFICANCE OF THE STUDY

Problem representation is accepted to be the key to problem solving (Jonassen, 2003). Problem representation involves translating a problem from words into a meaningful representation (Jitendra, 2002). Problem solution refers to the selection and application of appropriate mathematical operations based on the representation. It involves both solution planning and execution of mathematical operations. Hence the importance of problem representation in problem solving is evident. However, using different types of representations effectively will create desired changes among the performance levels. Students' comprehension and mathematical thinking levels have influences on the problem solving performance as well.

In this study sixth grade is considered to be the most appropriate level for teaching about problem solving and problem representation. Because it is the first year of schooling that the students are learning how to solve a problem scientifically. Until sixth grade, students are used to solve problems by using some simplified methods that most of the time causes students to memorize some structures and apply rules. However, problem solving is beyond applying rules into given situations, it requires critical thinking and evaluation. According to Piagetian stages of cognitive development, sixth grade students are in formal operational stage, that is, they are stimulated to develop higher thinking skills, which are basically theoretical and abstract principles of logic (Steinberg, 1991). Therefore, sixth grade is important to give fundamentals of problem solving and strategies that makes problem solving easier for them.

4. PROBLEM STATEMENT

The present study examines differences among students as they try to represent a given set of problems that require the use of external representations for successful solution. The study also questions how differences in problem representation may contribute to students' understanding and subsequent problem solving performance following instruction on a topic that invests on the use of external representations (Venn diagrams). The study is expected to contribute to major issues that relate problem representation and problem solving performance in mathematics. On a more general level this study is expected to make topic-based contributions to basic questions on factors effecting problem solving performance.

The study specifically aims to understand how students who differ in terms of their problem representation levels differ in terms of the degree to which they benefit from instruction on a topic that specifically requires the use of external representations (Venn diagrams).

The data are also analyzed to determine the types of representations that are used by good/average/poor representers while solving familiar and unfamiliar problems. Such an extension is presumed to provide greater insight particularly in understanding how students solve unfamiliar problems.

The topic of the present study includes "set problems", because problem solving in this area is considered to be highly dependent on the use of external representations. A very common form of representation used when solving "set problems" is Venn diagrams. Thus the more specific questions of the present study relate to the influence of planning on performance of students when solving "set problems".

4.1. Hypothesis

The study hypothesizes that students who use more effective representation strategies will show greater gains following instruction on "set problems" as compared to students who use ineffective or poor representation strategies. Therefore the study addresses the following specific hypotheses:

- Sixth grade students who are classified as "good representers" will perform significantly higher than students classified as "poor representers" while solving set problems in the posttest and the retention test.
- Sixth grade students who are classified as "good representers" will perform significantly higher than students classified as "average representers" while solving set problems in the posttest and the retention test.
- Sixth grade students who are classified as "average representers" will perform significantly higher than students classified as "poor representers" while solving set problems in the posttest and the retention test.

4.2. Variables and Operational Definitions

The study questions problem solving performance differences among students who differ in terms of problem representation level. The variables of the study are performance on set problems and problem representation level.

Performance on set problems was operationalized in terms of test scores obtained from three achievement tests that covered problems on sets. The pretest was used to assess performance prior to instruction and the posttest was used to assess performance following the instruction. Pretest (WPT1) and posttest (WPT2) consisted of two parallel forms that included five open ended questions. The third test was used to assess retention (R-WP) and consisted of 10 multiple choice questions.

Problem representation level was operationalized in terms of ability to analyze the problem and express it correctly and the ability of making a solution plan. It was assessed by a semi-structured interview such that the students were asked to solve two problems (one familiar and one unfamiliar) and explain their reasoning. Their conversations with the interviewer were recorded and an observation checklist was used during the interview to determine the students' behaviors and their way of thinking through their explanations while solving the given problems. Based on the data obtained during the solution process, the students were classified into corresponding (good, average, poor) representation levels.

A detailed explanation of the pre and post assessment tools (pretest, posttest and retention test) and the semi-structured interview will be given in the "Instruments" section.

5. METHODOLOGY

5.1. Sample

All sixth grade students in Eyüboğlu High School were considered as the sample population for being a convenient sample for the researcher. They were totally 164 (89 male, 75 female) students who were randomly distributed among seven classes at the beginning of the academic year. However 40 students were chosen from the 164 students for the interview on representation levels. The sample was selected using purposeful sampling. During the selection process one criterion that was considered was to choose students who could more readily express their thought processes. The distribution of the sample across the seven sixth grade classes is presented in Table 5.1. All of the 164 sixth graders received pretest, posttest and retention test prior to and following instruction on "sets and set problems". However, analysis of performance gains for good/average/poor representers was based on the data obtained from the 40 students who received the interview on representation levels.

Three instructors, whose teaching experiences in sixth grade were at least two years, carried out instruction on "sets and set problems". One of the instructors was teaching three of the sixth grade classes while others were teaching two of the classes. The teachers spend 8-9 lessons on the subject matter. The scope and sequence of the instruction was identical for all three teachers. The seven classes were compared in terms of students' performance levels, because the students (n=40) who received the interview on problem representation were diversely distributed among these seven sixth grade classes. The comparisons based on ANOVA indicated that these classes were similar in terms of their performance prior to and following instruction on "sets and set problems", such that F-values for pretest and posttest were as $F(5, 39)=1.864$, $p=0.127$ and $F(5, 39)=0.986$, $p=0.441$ respectively. Pretest and posttest scores of the seven sixth grade classes and corresponding teachers are presented in Table 5.1.

Table 5.1. The distribution of the students in terms of classes

	Class	Number of students	Mean of Pretest	Mean of Posttest
1st Teacher	6A	11	28	43
	6B	5	33	40
2nd Teacher	6D	2	28	43
	6E			
3rd Teacher	6C	12	23	38
	6F	6	32	44
	6G	4	31	45
	Mean		29	42
	Standard Deviation		3.6	2.6

5.2. Instruments

The instruments used in the study are designed to assess students' 1) Performance on set problems and 2) Problem representation level.

5.2.1. Instruments Used to Assess Problem Solving Performance

In order to determine the performance on set problems, the students were given two groups of tests: 1) Tests on word problems (WPT1 and WPT2) and 2) Retention test on word problems (R-WP).

The tests on word problems consisted of two parallel forms (WPT1 and WPT2) that included five open-ended word problems about sets (See Appendix A and Appendix B). The items were arranged from the simplest to complex. The students were given 20 minutes for each of the tests. However, retention test (R-WP) was composed of 10 multiple-choice questions related with set problems and students were given 25 minutes to complete the test (See Appendix C). The type of the retention test was different from the pretest and the posttest. In the retention test, the researchers tried to find out how much students remember the concepts related with sets and sets problems by asking more questions such that some of them require simple calculations while others require interpretations.

For the tests on word problems WPT1, WPT2, each item was scored as 10 points and for the test R-WP, each item was scored as 5 points. The students received partial credits for their partially correct solutions in WPT1 and WPT2; however they could not take any partial from R-WP test since it was multiple-choice test.

The tests were analyzed by using item analysis, reliability analysis and content validity measures. In order to check reliability as internal consistency Cronbach's alpha was used. The reliability for WPT1 was found as 0.41, it was 0.71 for WPT2 and 0.49 for R-WP. The alpha values of pretest and retention test were lower than the alpha value of the posttest. Since in the pretest, last two questions were related with new concepts that students would learn during the instruction and also many students failed to remember specific issues related with set problems during the retention test. Three math teachers checked the tests for validity and agreed on content validity of the tests.

5.2.2. Instruments Used to Assess Problem Representation

Problem representation was assessed in terms of a semi-structured interview while two "set problems" were asked to be solved by the students. One of the questions was a typical set problem that the students were familiar. However the second question was unfamiliar for them which required students to use representations including but not limited to Venn diagrams for successful solution (Table 5.2).

During the interview the students were observed and they were guided by pre-determined questions about their solution plan. The students were questioned on tasks such as the kind of action they would take as the first, what they would do when they were stuck, etc. The questions to be posed during the interview were withheld as much as possible but were used whenever required to keep the interview going. Students' responds to the interviewer were recorded to be used for the evaluation of their performance. A checklist was filled during the interview containing items to identify the use of external representations such that using sketches, graphs, charts or diagrams and internal representations which were inferred from behaviors of the students while solving the problem as well as their comments while thinking aloud about the problem and the solution. The items in the checklist are given in Table 5.3.

Table 5.2. Questions that students were asked to solve during the interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?

Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur: Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.

Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.

Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.

Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.

Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

Table 5.3. Checklist for the interview

		Soru 1		Soru 2	
	DAVRANIŞ / BECERİ / YAKLAŞIM	EVET	HAYIR	EVET	HAYIR
1.	Problemde verilen bilgileri not alıyor				
2.	Problemi temsil eden simge, işaret veya şekil kullanıyor				
3.	Problemin çözümü için gerekli olan formül veya kuralları biliyor				
4.	Problemi belli bir sıra takip ederek çözüyor				
5.	Problemin çözümünde kullandığı işlemlerin nedenlerini biliyor				
6.	Problem çözüm aşamalarını anlatabiliyor				
7.	Problemin sonucunu bulduktan sonra geçerliliğini kontrol ediyor				

The students were evaluated according to their answers to the given questions, their responds to the interviewer and the scores in the checklist. The items on the checklist were filled for both questions and the students were categorized according to each question. If the student was marked as "YES (Evet)" for at least six items in the checklist then s/he was identified as "Good", if s/he was marked as "YES (Evet)" for at most two items in the checklist then s/he was identified as "Poor" and otherwise s/he was identified as "Average". For instance, if the student used any type of representation, followed a logical order as making necessary calculations and could explain his/her reasoning to make those calculations and for his/her findings then s/he can be thought as good representer. However, if s/he did not know what actions should be taken as first and just tried to make some calculations randomly, could not explain his/her reasoning and did not check the rationality of his/her answer then s/he can be thought as poor representers. If s/he could find the answer to the question but failed to explain his/her reasoning in some steps of the solution process then s/he can be thought as average representers. The examples from the students' answers who were classified as poor, average or good representer, are presented in Figure 5.1, Figure 5.2 and Figure 5.3 respectively.

In the example given in Figure 5.1 the student drew the Venn diagram for the first question but placed the number of the elements for the sets inappropriately. Furthermore the student could not explain the reasoning for her calculations. In the second example the student used set operations for solving the second problem however he used wrong notation that is instead of using intersection symbol he used union symbol but he could explain his reasoning partially for his answer.

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?

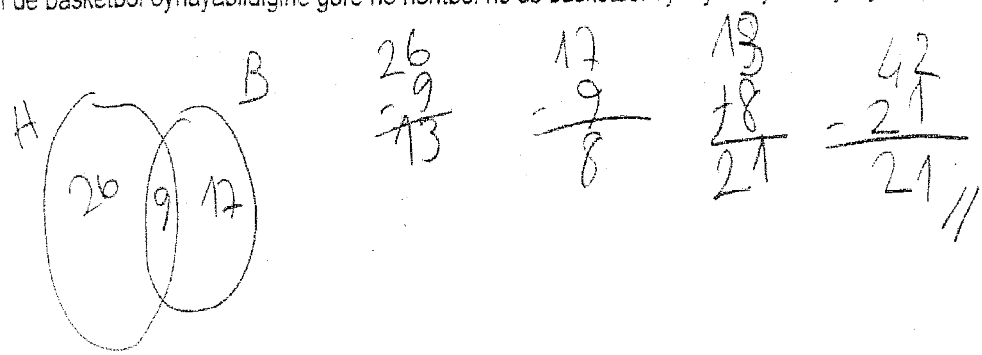
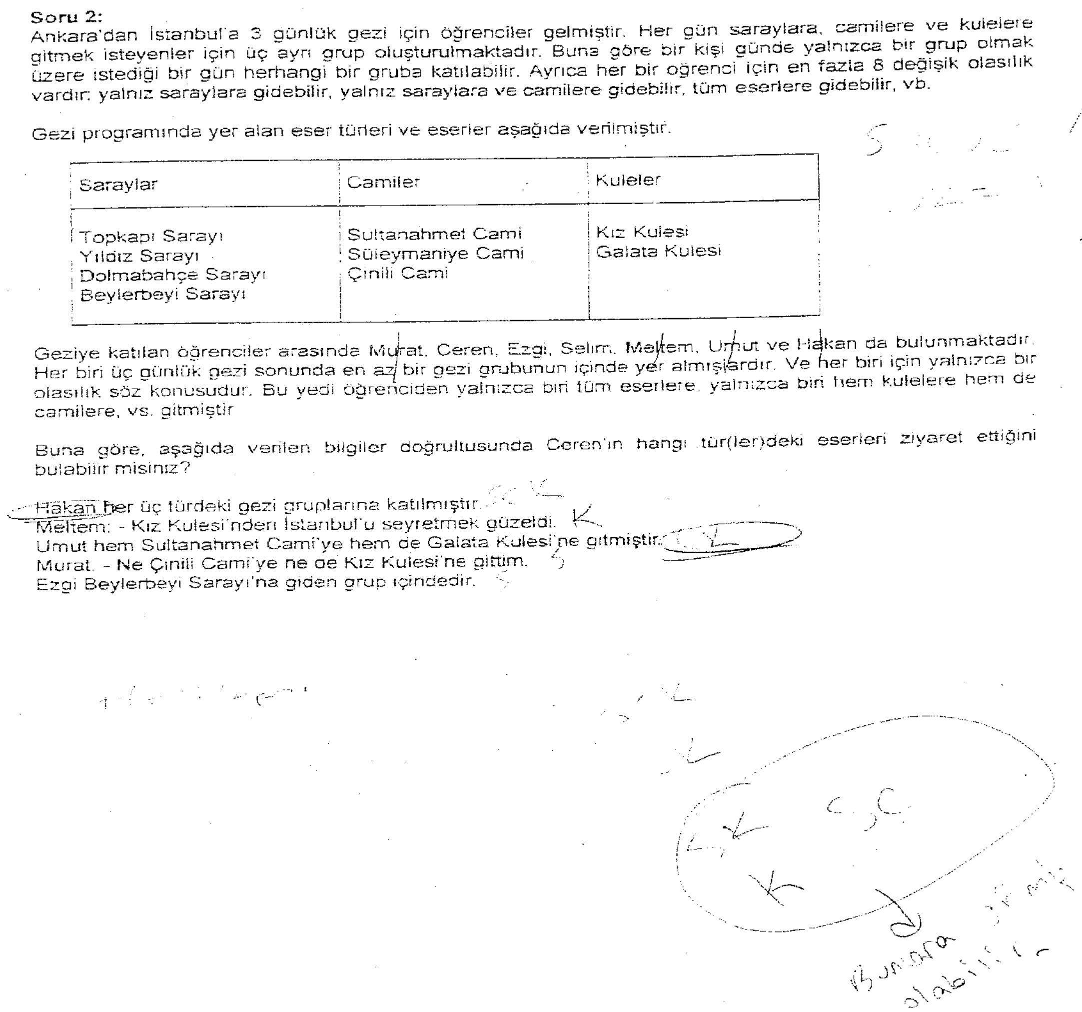


Figure 5.1. Example from the answer of the student who classified as poor representer

In Figure 5.3 there is an example for the solution of the second question such that the student used Venn diagrams to solve the question. The student could also explain his reasoning for his calculations. Since items in the checklist determines whether the questions were solved or not, it is used as an objective tool for classification of the students rather than merely depending on the evaluation of the scorer.

Furthermore, scripts of two of the students' dialogue with the interviewer are presented below. One of them is the speech of the "poor representer" and the other one is the "good representer" whose solutions are given above in Figure 5.1 and Figure 5.3, respectively. Further examples are attached in Appendix D.



Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur. Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir.

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat. - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

Figure 5.2. Example from the answer of the student who classified as average representer

Dialogue of poor representer with the interviewer:

***I:** Nasıl düşündün, kısaca anlatır mısın?*

***PR:** Spor grubunda 26 kişi hentbol 17 kişi de basketbol oynadığına göre bir de 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynuyor. Ve bu 9 kişiyi her ikisinden de çıkardım.*

***I:** Hı hı...*

***PR:** Ve yani her ikisini de topladım. 42 kişilik spor grubu olduğu için 42'den çıkardım ne basketbol oynayan ne de hentbol oynamayanları buldum.*

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

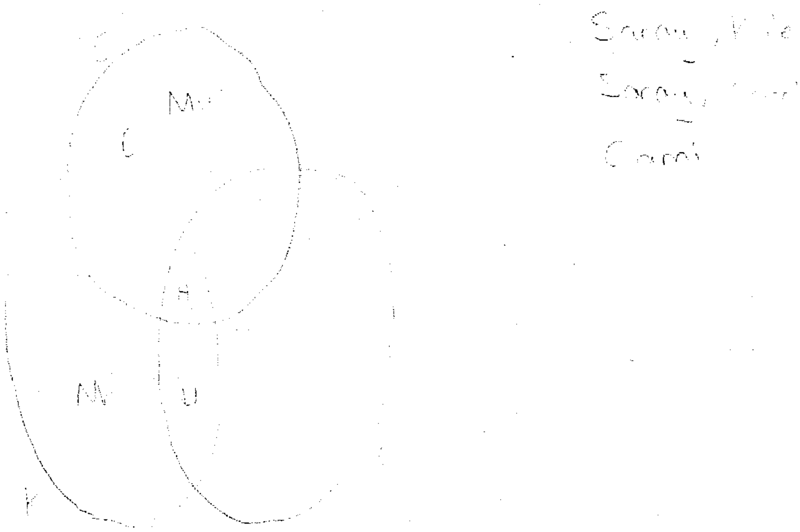


Figure 5.3. Example from the answer of the student who classified as good representer

Dialogue of good representer with the interviewer:

I: *Soruyu anladın mı?*

GR: *Bir geziye gidiyorlarmış. Gruplara ayrılıyorlar. Fakat sadece işte biri gidebiliyor*

I: *Hepsine gidiyor veya yalnızca saraylara gidiyor, işte bir tanesi saray ve camiye gidiyor, vesaire şeklinde. Ve orada bazı bilgiler verilmiş. Bunlardan yola çıkarak Ceren'i bulabilir misin?*

GR: *Hı, hı... (Onaylıyor.)*

I: *Bak bakalım bulabilecek misin?*

GR: *Şimdi yine bir çizeyim. (Venn şeması çiziyor. Elemanları yerleştirirken sesli düşünüyor.)*

GR: *Hakan üç...hımmm...saray-cami, Hakan... Meltem Kız Kulesi... dur! (yazdığını siliyor) Umut cami ve kule, Murat... o zaman buraya gitti (yalnız saraylara yazıyor) Çünkü herkes bir yere gitmek zorunda...*

I: *Yani, orası neresi?*

***GR:** Saraylar…Bir dakika (bir şey bulmuş gibi) şu gitti! Ezgi saray…Şimdi Ceren bunların dışında.*

***I:** Evet.*

***GR:** Ve en az birine gitmek zorunda.*

***I:** Evet! Neler kaldı, nerelere gitmiş olabilir?*

***GR:** Hem saray hem kule olabilir.*

***I:** Onları yazar mısın söylediğin şekilde.*

***GR:** (Olasılıkları yazıyor.) Başka ne olabilir…(düşünüyor) Saray-cami olabilir. Bir de sadece cami olabilir…*

Overall categorization was based on the results of the categorization for each question. A student was classified as a "good" representer if s/he was grouped as a "good" representer in both problems, or if s/he was grouped as a "good" representer in the first problem and as an "average" representer in the second problem. A student was classified as an "average" representer if s/he was grouped as an "average" representer in both problems, or if s/he was grouped as a "good" representer in the first problem and as a "poor" representer in the second problem. And thirdly, a student was classified as a "poor" representer if s/he was grouped as a "poor" representer in both problems, or if s/he was grouped as an "average" representer in the first problem and as a "poor" representer in the second problem. The categorization of the students in terms of representation levels presented in Table 5.4.

Table 5.4. Categorization of the students in terms of representation levels

	1st question	2nd question
Good	Good	Good
	Good	Average
Average	Average	Average
	Good	Poor
Poor	Average	Poor
	Poor	Poor

The content and construct validity of the problems that were asked during interview were agreed by three math teachers. The validity of the items in the checklist was satisfied by the results of the literature review such that it reveals fundamental characteristics and behaviors of the student while solving problems. It has been found that achievement on problem solving depends on ability to represent problems in terms of paraphrasing or restating problems in one's own words, taking notes, visualizing problems by drawing pictures, constructing diagrams or charts, and making mental images in relation to mathematical notations and making backward check for reasonableness of the solution (Schoenfeld, 1987; Hegarty, *et al.*, 1995; Montague and Applegate, 2000; Pape and Wang, 2003; Jonassen, 2003). For the reliability of the checklist and questions interjudge reliability analysis was used. One math teacher who made the interview with the students and an expert educator on problem solving who examined students' answer sheets and checklists and listened their interviews from a tape recorder categorized the students as "good", "average" and "poor" and it was found that among the 40 students, four of them were classified differently. Hence interjudge reliability was determined as 0.90. By reviewing the students' work together their categories were determined again, thus agreement on the student's type was satisfied.

Since it was expected to see whether students could use representations, specifically Venn diagrams in different type of problems and how they make inferences from the representations, the second question was specifically selected as a problem that had no exact answer but possible answers.

According to results of the items in the checklist as well as the observation, the students were categorized into corresponding representation levels as indicated above. The data analysis were made according to two types of categorizations: First analysis was based on the categorization in which students were grouped into "good", "average" and "poor" representers by looking at their overall performance in the interview. However, the second analysis was based on the categorization of the students according to their answers to the second question since it presumably would give more information about the exact level of students by being an unfamiliar problem for them.

5.3. Design and Procedure

The overall study is a composition of two related studies which basically questions how problem representation affects problem solving performance of the students.

The design of the study can be identified as ex-post facto design where differences among representation level were analyzed without deliberate manipulation.

All students in the sample population participated into study and they were exposed to similar instruction. The instruction followed its regular course such that 8 lessons (approximately) were allotted for teaching and practice with set problems. The teachers were in coordination about how to teach the subject matter and which examples would be given but no experimental manipulations were actualized during the instruction. In addition, the students were given a worksheet about strategies of problem solving and two more worksheets about word problems about sets (See Appendix E, Appendix F and Appendix G).

Prior to instruction students were administered WPT1 (Test on Word Problem 1). WPT1 was used as a means to control for prior knowledge when analyzing differences between different representational groups. The students received WPT2 (Test on Word Problem 2) immediately following instruction. WPT2 was used to examine differences among students' performances.

The administration of the pretest (WPT1) given prior to instruction took 20 minutes and it was given during the regular class hours. The instruction was initiated by introducing the procedures of solving a word problem, specifically word problems related to sets. The students were taught about the key words to use for analysis of the problems, how to write given information as set operations (which is named as symbolic representation) and how to insert givens into a Venn diagram (graphical representation). From the classwork, 12 questions were solved as examples and the students were given opportunities to try on their own. At the end of 8 lessons the students were given a parallel test WPT2. The students were given 20 minutes and asked to use what they have already learned about solving word problems in sets. They were not obliged to use either symbolic or graphical representation.

The retention test on word problems (R-WP) was given approximately six months later then set problems were studied. After the application of R-WP, some of the students were selected for interview. The selected students were interviewed during the lunch time not in regular course hours in a private section of the school library. Each interview lasted approximately 10 minutes and all conversations between the student and the interviewer (the researcher) were recorded. First, the students were given time to solve the questions and then they were asked to explain their solutions.

During the interview the students were asked two questions, one was a typical and familiar set problem while the other was an unfamiliar problem that required use of representations to reach the answer. However the second question did not have an exact answer. The students were expected to use representations to make solution more apparent even though they could not find any correct answer and evaluate their findings and offer something to make solution unambiguous.

A math teacher (the researcher) and an expert educator on problem solving rated students' performances by evaluating their representations and answers on their answer sheets, listening to their conversations with the interviewer and assessing their observation checklists. Since the compatibility among the ratings was satisfactory, interscorer reliability of the students' categorizations according to their representation levels was high (0.90). The resulting categories (that outline good/average/poor representation levels) were used to compare the differential effect of problem representation on problem solving performances.

6. RESULTS

6.1. Data Analysis

The study aims to examine differences in problem solving performance of students who differ in terms of their problem representation level. Performance differences were examined using pretest, posttest and retention test scores prior to and following instruction on "sets and set problems". Table 6.1 presents the mean and the standard deviation of the tests for each type of representers.

Table 6.1. Mean and standard deviation of the tests for each type of representers

		Performance Tests					
		WPT1		WPT2		R-WP	
Representation level	Number of students	M	SD	M	SD	M	SD
Good	10	29.50	5.99	43.50	2.42	40.50	4.97
Average	17	30.29	9.43	42.65	4.72	34.71	4.50
Poor	13	23.85	7.68	38.46	10.49	26.15	7.95

The mean of the pretest (WPT1) for good representers is 29.50 with standard deviation 5.99 while the mean of the pretest for average representers is 30.29 by having 9.43 as the standard deviation. Poor representers achieved 23.85 as the mean for the pretest with standard deviation 7.68. For the posttest (WPT2) good representers got score 43.50 (s.d=2.42) while average representers got score 42.65 (s.d=4.72). The mean of the posttest scores of poor representers is lower than good and average representers', such that 38.46 with the highest standard deviation 10.49. The difference among the scores of retention test

(R-WP) signals about the difference among the performance of good/average/poor representers more apparently. Hence, the mean of the good representers' scores is 40.50 (s.d=4.97), the mean of the average representers' scores is 34.71 (s.d=4.50) and the mean of the poor representers' scores is 26.15 (s.d=7.95).

The data were analyzed by using one-way ANOVA to question differences between good/average/poor representers in terms of their pretest, posttest and retention test (WPT1, WPT2 and R-WP) scores. In Table 6.2 the results of the analysis indicates that the performance of each group in pretest and posttest is not significant while it is significant ($p<0.05$) in the retention test.

Table 6.2. Group comparisons using overall representation level as the grouping variable

		Sum of Squares	df	Mean Squares	F	Sig.
PRE	Between groups	336.278	2	168.139	2.535	0.093
	Within groups	2453.722	37	66.317		
	Total	2790.000	39			
POST	Between groups	182.387	2	91.193	1.953	0.156
	Within groups	1727.613	37	46.692		
	Total	1910.000	39			
RETENTION	Between groups	1215.653	2	607.827	17.250	0.000
	Within groups	1303.722	37	35.236		
	Total	2519.375	39			

The mean scores for the pretest were 29.50 (s.d=5.99) for "good representers", 30.29 (s.d=9.43) for "average representers", and 23.85 (s.d=7.68) for "poor representers". The ANOVA analysis revealed that the groups were not significantly different in term of their pretest scores such that F-value is obtained as $F(2, 39)=2.535$, $p=0.093$.

The mean scores for the posttest were 43.50 (s.d=2.42) for "good representers", 42.65 (s.d=4.72) for "average representers", and 38.46 (s.d=10.49) for "poor representers". Similarly, it is found that the groups were not significantly different in term of their posttest scores such that F-value is obtained as $F(2, 39)=1.953$, $p=0.156$. Hence, groups were not significantly different in terms of their pretest and posttest scores.

However comparison of the retention test scores reveals a significant difference among the groups. The mean scores for the retention test were 40.50 (s.d=4.97) for "good representers", 34.71 (s.d=4.50) for "average representers", and 26.15 (s.d=7.95) for "poor representers" thus, F-value is obtained as $F(2, 39)=17.250$, $p=0.000$. Furthermore, as presented in Table 6.3, Scheffe analysis of means for groups in homogeneous subsets indicates that there is a difference among the poor/good and poor/average representers in terms of scores of retention test.

Table 6.3. Means for groups in homogeneous subsets

Scheffe [a,b]

PRETEST			POSTTEST			RETENTION TEST			
Rep. level	N	Subset for alpha=0.05	Rep. level	N	Subset for alpha=0.05	Rep. level	N	Subset for alpha=0.05	
		1			1			1	2
Poor	13	23.85	Poor	13	38.46	Poor	13	26.15	
Good	10	29.50	Good	10	42.65	Good	10		40.50
Average	17	30.29	Average	17	43.50	Average	17		34.71
Sig.		0.150	Sig.		0.191	Sig.		1.000	0.060

Moreover, the students were grouped according to their answers to the second problem during the interview. In the overall evaluation, 13 students were classified as "poor representer", 10 students were classified as "average representer" and 17 students were classified as "good representer". Students were classified according to their performances in the second question so that 17 students were classified as "poor representer", 14 students were classified as "average representer" and 9 students were classified as "good representer". The results of pretest, posttest and retention tests of the representers according to categorization in terms of second question are presented in Table 6.4.

The mean of the pretest for "good representers" according to second question is 29.44 (s.d=6.34), it is 30.71 for "average representers" (s.d=9.97) and it is 25.00 for "poor representers" (s.d=7.50). The means of posttest scores for "good representers", "average representers" and "poor representers" are 43.33 (s.d=2.50), 43.21 (s.d=3.72) and 39.12 (s.d=9.72), respectively. Furthermore, the means of retention test were obtained for "good representers", "average representers" and "poor representers" as follows: good representers' mean is 39.44 (s.d=3.90), average representers' mean is 36.79 (s.d=5.40) and poor representers' mean is 27.35 (s.d=7.52).

Table 6.4. Mean and standard deviation of the tests for each type of representers in terms of the second question

		Performance Tests					
		WPT1		WPT2		R-WP	
Representation level	Number of students	M	SD	M	SD	M	SD
Good	9	29.44	6.34	43.33	2.50	39.44	3.90
Average	14	30.71	9.97	43.21	3.72	36.79	5.40
Poor	17	25.00	7.50	39.12	9.72	27.35	7.52

The difference between the groups was analyzed by one-way ANOVA and the results were similar to the overall examination. There were no significant differences among the means of the groups in pretest and posttest such that F value for pretest comparison is $F(2, 39)=2.022$, $p=0.147$ and for posttest comparison it is $F(2, 39)=1.783$, $p=0.182$. However it is significantly different in retention test comparison such that $F(2, 39)=14.592$, p=0.000. One-way ANOVA results are presented in Table 6.5 while results of Scheffe tests for groups in homogenous subsets are presented in Table 6.6.

Table 6.5. Group comparison using the second question as the grouping variable

		Sum of Squares	df	Mean Squares	F	Sig.
PRE	Between groups	274.921	2	137.460	2.022	0.147
	Within groups	2515.079	37	67.975		
	Total	2790.000	39			
POST	Between groups	167.878	2	83.939	1.783	0.182
	Within groups	1742.122	37	47.084		
	Total	1910.000	39			
RETENTION	Between groups	1110.913	2	555.457	14.592	0.000
	Within groups	1408.462	37	38.067		
	Total	2519.375	39			

Table 6.6. Means for groups in homogeneous subsets in terms of the second question

Scheffe [a,b]

PRETEST			POSTTEST			RETENTION TEST			
Rep. level	N	Subset for alpha=0.05	Rep. level	N	Subset for alpha=0.05	Rep. level	N	Subset for alpha=0.05	
		1			1			1	2
Poor	17	25.00	Poor	17	39.12	Poor	17	27.35	
Good	9	29.44	Good	9	43.21	Good	9		39.44
Average	14	30.71	Average	14	43.33	Average	14		36.79
Sig.		0.238	Sig.		0.321	Sig.		1.000	0.567

Although ANOVA was used to compare good/average/poor representers further analysis was carried out using a nonparametric equivalent test (Kruskal-Wallis) because the number of students falling under representation categories except average representers was smaller than 15. The results of Kruskal-Wallis test were found significant for the retention test as indicated in Table 6.7. For pretest comparison Chi-Square value is 5.358, p=0.069, for posttest comparison Chi-Square value is 2.188, p=0.335 and for retention test comparison Chi-Square value is 18.286, p=0.000.

Table 6.7. Group comparison by using non-parametric Kruskal-Wallis test

Representation Level		N	Mean Rank
PRE	Good	10	22.55
	Average	17	23.82
	Poor	13	14.58
	Total	40	
POST	Good	10	22.05
	Average	17	22.09
	Poor	13	17.23
	Total	40	
RETENTION	Good	10	31.15
	Average	17	21.65
	Poor	13	10.81
	Total	40	

Test Statistics [a,b]

	PRE	POST	RETENTION
Chi-Square	5.358	2.188	18.286
df	2	2	2
Asymp. Sig.	0.069	0.335	0.000

6.2. Conclusion

Successful problem solving starts with representing the problem and then followed by an appropriate solution plan (Moreau and Viennot, 2003). Most of the time success or failure in any type of problem solving depends on how well the problem is represented in accordance with the type of the problem. For instance, using tables to differentiate the given information in a math problem may be useful to solve a specific type of problem while preparing a mechanism of an issue in chemistry or physics may help to understand the fact and see the possible solutions of the given problem.

In this study, differences among students as they were trying to represent given problems that required the use of external representations, especially Venn diagrams, were examined. The students were categorized into three categories as "poor representers", "average representers" and "good representers" and the difference among their performances were compared.

The students were given a pretest, a posttest and a retention test to determine their performance levels prior to, following and six months after the instructional period that covered the sets and set problems and a selected group were interviewed to determine their representation levels. The students were asked to solve two problems: one is a familiar problem (set problem) and the other one is an unfamiliar problem which is solved by use of any type of representation. Their answers to the questions and their abilities to solve the given problems are evaluated by the researcher and an expert educator on problem solving then the students were categorized as poor/average/good representers.

According the results of the one-way ANOVA -Scheffe analysis, it is concluded that there are differences in the performances of the "good" and "poor" representers and "average" and "poor" representers in terms of the results of retention test. Therefore the results support two of the hypotheses for the study such that:

1) Sixth grade students who are classified as "good representers" perform significantly higher than students classified as "poor representers" while solving set problems in the retention test.
2) Sixth grade students who are classified as "average representers" perform significantly higher than students classified as "poor representers" while solving set problems in the retention test.

However, the results do not support the relative superiority of good and average representers over poor representers in terms of the posttest scores. Furthermore the hypotheses, "Sixth grade students who are classified as "good representers" perform significantly higher than students classified as "average representers" while solving set problems" was not supported by neither posttest nor retention test scores.

Although pretest was used for satisfying homogeneity among the groups, the test scores were assumed to be close to each other. Similarly, results for the posttest were close to each other since it was immediately followed by the instruction about set problems and there was probability of memorizing the solution pattern of the set problems. However retention test would reveal the actual difference between the groups since the students have to remember how to solve set problems or develop their own methods. Results showed that "good representers" can use a solution plan and external representations to solve problems in any case, however "poor representers" failed to use a solution plan or external representation when they are required to recall the subject matter later in time.

Instruction for teaching about using external representation has influences on the performances of the students. Especially in a short time period most of the students are able to use those strategies to solve problems. However for making those methods to be permanent the student should develop his/her way of remember and use those methods. It can be achieved through internalizing the external representations and applying the problem solving plan in any situation. Immediate test results after an instruction may lead to misconceptions about students' actual performances. In mathematics it is crucial to use any method or learned fact for further studies since mathematics subjects are interrelated with each other. Therefore the important fact is to teach about how to solve any problem by using a common method. Since problem solving plan provides evidence that problem representation is the first step of problem solving, it should be known by every student in order to be good problem solver. External representations are commonly used in problem solving however students should use internal representations as well. A desired result is achieved whenever external and internal representations are used harmoniously.

The results of this study supports the anticipated differences among the expert and novice problem solvers such that an expert problem solver is able to use an appropriate problem representation in any case and develop a solution plan while novice problem solvers do not use any representation method or use them inappropriately so that they fail to make a solution plan or solve the problem.

Some of the novice problems solvers fail to solve problems since they are not able to use representations, correctly. In this study, "poor representers" failed to use Venn diagrams appropriately. Although they were taught about operations on sets (intersection, union, difference) their solutions showed that they did not truly understand the idea of operations on sets. They tended to memorize a pattern of solving a set problem without checking reasonableness of their findings. On the other hand "good representers" use Venn diagrams in set problems effectively and explain their reasoning while inserting numbers on the diagrams. Furthermore, "good representers" tended to use any kind of representation before attempting to solve problem and analyze all information carefully, then make a solution plan, however "poor representers" start calculations without making any solution plan or using any symbols, tables or figures to represent problems.

In addition, for the second problem students could to use Venn diagrams to find the answer of the question. However only six students attempted to use Venn diagrams. Since it was assumed that the first problem might be a cue for the solution of the second problem, a few of them realized the relation. However, nine students preferred to write possible combinations of the places that would be visited and then they eliminated some of the possibilities by using given information. Furthermore, it was observed that "good representers" preferred to use their reasoning abilities to find the answer given question such that they tended to find possibilities and label each of them with right persons. Although some of the students attempted to write possibilities, they failed to differentiate the places and their categories. These students failed to think the category of the places as a set rather than the places itself. For instance, if a certain person is said to be visit Topkapı Palace, the student considered Topkapı Palace as one of the possibilities although palaces is the possible place that was visited.

These findings imply that students' reasoning abilities may account for the representations they use while solving math problems. For example for the second problem in the interview, students who could use formal reasoning abilities (i.e. hypothetico-deductive reasoning, combinational reasoning or probabilistic reasoning) would be at an advantage over those students who are less competent formal thinkers. Therefore reasoning abilities may also function in helping students when generating representations for a given problem. However the contribution of reasoning ability to students' representation levels is not within the boundaries of the present study. But it seems to be an important issue that can be continued in following research studies.

6.3. Limitations and Suggestions for Further Studies

Although all sixth grade students were included in initial performance tests, relatively few of them were interviewed. Since present data reveal much information about the interaction between students' performances and representations level, larger sample size would give more information about the questioned correspondence between problem solving performance and representation ability.

Since set problems uphold the use of external representations (Venn diagrams) naturally, categorizing students according to their abilities to use of Venn diagrams may not yield exact information about representation levels of the students. Although during the interview, the second question is selected as an unfamiliar problem to the students, some of them thought about using Venn diagrams by forming analogies with the type of the first problem. To make generalizations about the representation level of students, solely depending on their ability to use the Venn diagrams in set problems, may yield mistaken information. Hence, different studies should be designed to observe the relation between problem solving performance of students and their problem representation level on different issues of mathematics except set problems. The representation level of a student should depend on the analysis of data gathered about student's performance and achievement in different problem solving activities.

Furthermore, the assessment tools which were used for differentiating the representation level of the students should be varied. Interview results may not provide sufficient information about students' representation levels since questions were domain specific, that is, it is designed to learn about how well students use external representations specifically Venn diagrams. In order to assess the representation level of the students, different instruments may be used or developed. Special problem solving activities or more structured tests may be constructed according to grade levels of the students.

One of the implications of the study is to put emphasis on the use of external representations in mathematics lessons. The teachers should believe in the power of using representations for retention and permanent learning. Hence they should emphasize the importance of using representations and encourage students to start solving any problem after representing it in some way. The teacher should behave as a model for the students how to represent a given problem. S/he should use different type of external representations such as graphs, tables, diagrams and symbols and tell about the methods that would be more convenient in different situations.

The second implication is to make problem representation a routine as the initial step of problem solving for the students. The teachers should prepare exam questions in a way that students would express all of the solution steps, verbally. For instance, the problem statement may be followed by such questions: 1) write down all given information in the problem; or more specifically "What does number 30 refer to in the question?", "Do you know the number of girls in the class?" etc. 2) what is asked in the problem 3) can you summarize the problem statement by using pictures, graphs, charts or symbols 4) is there any formula or method should be used 5) what do you think about the initial step for the solution, etc. Although it would be better to make students aware of their problem solving process, the number of the questions asked following the problem statement should not exceed four or five, otherwise the students may not want to solve problems since they have to answer several other questions preceding the numerical solution.

The third implication is to find out an efficient way to assess students' actual learning in the classroom environment. Although preparing sub-questions following the problem urges students to understand the problem and make a solution plan, the students may be asked to answer those questions orally, during the problem solving activities held in the classroom. Furthermore, as students try to represent the given problem they do not only use external representations but also their internalized representations. In order to decide on how well the student use internal representations s/he should be asked to verbalize his/her thought process during problem solving orally or written. In addition, making students work in groups for problem solving activities may be supportive for novice problem solvers or poor representers and help them to learn about how to develop a plan for solving a problem and representing it.

Hence, the teachers should develop different methods to assess actual performance and representation levels of the students and the level of their understanding. The results of multiple-choice type tests or open-ended type exams may be deceptive about exact performance of the students. As observed in this study, especially, follow-up test results may give misleading information about students' performance levels since students may automatically use solution algorithms solve problems without making control of the data obtained. Mathematics educators can help students understand the meaning underlying the surface features of the problem by guiding problem representation process, which may in term improve long term performance and retention.

APPENDIX A: TEST ON WORD PROBLEMS -PRETEST (WPT1)

1) Bir çiftlikte 15 tavuk, 10 kaz ve 13 tane de hindi bulunmaktadır. Bu çiftlikte kaç hayvan vardır?

2) 39 kişilik bir sporcu kafilesindeki sporculardan 25 kişi futbol, 20 kişi voleybol oynamaktadır. Her iki oyunu da oynayan kaç sporcu vardır?

3) Bir sınıftaki öğrencilerden matematik dersinden sınıfı geçenler 18 kişi, Türkçe dersinden geçenler 24 kişi, her iki dersten sınıfı geçenler 7 kişi olduğuna göre sınıf mevcudunun kaç kişi olduğunu bulunuz.

4) 20 kişilik turist kafilesindeki yolcular mola yerinde çay veya meyve suyu içiyorlar. Çay içenler 15, meyve suyu içenler 10 kişidir. Yalnız meyve suyu içen kaç kişi vardır?

5) 36 kişilik bir turist kafilesinde yolcuların bir kısmı İngilizce ve Fransızca dillerinden birini biliyorlar. Bu turistlerden 19 kişi İngilizce, 24 kişi Fransızca, 10 kişi her iki dili de biliyorlar. Bu turist kafilesinde İngilizce veya Fransızca bilmeyen kaç kişi vardır?

APPENDIX B: TEST ON WORD PROBLEMS -POSTTEST (WPT2)

1) Bir meyve bahçesinde 13 elma, 16 armut ve 18 tane de kiraz ağacı bulunmaktadır. Bu meyve bahçesinde toplam kaç meyve ağacı vardır?

2) 45 kişilik bir turist kafilesindeki turistlerden 26 kişi Almanca, 23 kişi de Fransızca bilmektedir. Her iki dili de bilen kaç turist vardır?

3) Bir sınıftaki öğrencilerin 21 tanesi Hentbol takımında, 13 tanesi Voleybol takımında yer almaktadır. Her iki takımda da oynayan 6 öğrenci olduğuna göre bu sınıfın mevcudunu bulunuz.

4) 32 kişilik bir sınıfta öğrenciler öğle yemeğinde tost veya sandviç yiyorlar. Tost yiyenler 18, sandviç yiyenler 20 kişidir. Yalnız tost yiyen kaç kişi vardır?

5) 42 kişilik bir sporcu kafilesinde bazı sporcular tenis ve hentboldan birini oynuyorlar. Bu sporculardan 17 kişi tenis, 28 kişi hentbol, 15 kişi her iki oyunu oynayabiliyor. Bu sporcu kafilesinde tenis veya hentbol oynamayan kaç kişi vardır?

APPENDIX C: RETENTION TEST ON WORD PROBLEMS (R-WP)

1) M={10'dan küçük doğal sayılar}

   N={3'ün 10'dan küçük doğal sayı katları}

   T={7'den küçük çift doğal sayılar} kümeleri veriliyor.

   $T-(M \cap N)$ kümesinin elemanları aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

   A) {2,4,6} B) {1,5,7}

   C) {1,5,7,8} D) {4,2}

2) $s(B-A)=4$, $s(A \cup B)=13$, $s(A-B)=2$ ise $s(A \cap B)$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?

   A) 11 B) 7

   C) 9 D) 2

3) Bir sınıftaki öğrencilerin her biri Almanca veya Fransızca dillerinden birini bilmektedir. 12 öğrenci Almanca, 10 öğrenci Fransızca ve 4 öğrenci hem Almanca hem de Fransızca bildiğine göre bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

   A) 26 B) 18

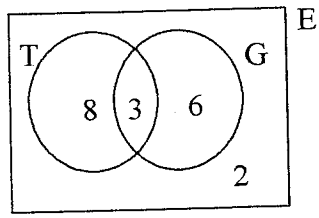
   C) 14 D) 20

4) 20 kişilik bir toplulukta, 8 kişi flüt, 10 kişi keman çalabiliyor. Bu grupta 4 kişi ne flüt ne de keman çalabildiğine göre, her iki enstrümanı çalan kaç kişi vardır?

   A) 6 B) 8

   C) 2 D) 3

5) Yandaki şemada bir grup öğrenciden tenis veya gitar kursuna gidenlerin sayısı belirtilmiştir. Buna göre aşağıdaki bilgilerden hangisi doğrudur?



A) Tenis kursuna gidenlerin sayısı gitmeyenlerin sayısına eşittir

B) Kurslardan en çok birine giden 14 öğrenci vardır

C) Kurslardan en az birine giden 17 öğrenci vardır

D) Gitar kursuna gitmeyen 8 öğrenci vardır

6) K={Sınıfımızdaki kız öğrenciler}

A={Sınıfımızdaki Almanca bilen öğrenciler}

F={Sınıfımızdaki futbol takımında oynayan öğrenciler}

Yukarıda verilen kümelere göre "Sınıfımızdaki Almanca bilmeyen futbol takımındaki erkek öğrenciler" ifadesi küme işlemleriyle nasıl belirtilir?

A) $(A \cup K) - F$ B) $F - (A \cup K)$

C) $F - (A \cap K)$ D) $(F \cap A) - K$

7) 24 kişilik bir grupta herkes resim veya yüzme kurslarından birine gitmektedir. 13 kişi resim, 15 kişi yüzme kursuna gittiğine göre, yalnız resim kursuna giden kaç kişi vardır?

A) 9 B) 11

C) 4 D) 10

8) $B \cap C = \Phi$ ve $A \cap C = \Phi$ olmak üzere,

$s(A)=14$, $s(B)=12$, $s(A \cap B)=5$ ve $s(A \cup B \cup C)=27$ ise C kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 4 B) 2

C) 1 D) 6

9) 38 kişilik bir gezi grubunda 20 kişi İngilizce, 12 kişi Almanca ve 4 kişi de her iki dili bildiğine göre, en çok bir yabancı dil bilen kaç kişi vardır?

A) 34 B) 32

C) 28 D) 24

10) Hürriyet veya Milliyet gazetelerinden en az birine abone olan 60 kişiden 28'si yalnızca Hürriyet, 24'ü yalnızca Milliyet gazetesine abone olduğuna göre her iki gazeteye abone olan kaç kişi vardır?

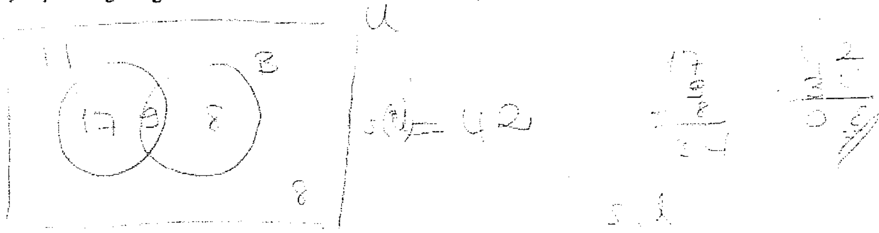
A) 10 B) 8

C) 12 D) 52

APPENDIX D: SAMPLES FROM STUDENTS' SKETCHES AND EXPLANATIONS FOR THEIR SOLUTIONS

Appendix D.1. Sample from Good Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?



Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur. Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır. – tüm eserler
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi. – kuleler
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir. – camiler, kuleler
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim. – saraylar
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir. – saraylar

Ceren, saraylar ve camilere gidebilir.

~~yalnız~~ saraylar
kuleler
camiler

~~camiler~~ camiler, kuleler
saraylar
saraylar, kuleler

~~tüm~~ eserler

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

GR: Önce bir universal set çizmek zorundaydım çünkü hiç oynamayanları soruyordu. Bütün universal seti bilmem benim için çok büyük bir avantaj oldu. H kesişim B kümesi 9 kişi, demek ki 26 kişiyse… sırf hentbol oynayanlar 17 kişi.

I: Evet.

GR: Basketbol oynayanlar 18 kişi. 17, 9 ve 8'i -pardon basketbol oynayanlar 8 kişi, 17, 9 ve 8'i topladım, 34 kişi ve 42'den de 34'ü çıkardım 8 kişi.

I: Tamam, teşekkürler, şimdi ikinci soru için ne düşündün anlatır mısın?

GR: Düşündüm ben ve sadece iki olasılık buldum: sadece camiler olabilir ya da saraylar ve kuleler olabilir çünkü bunlara hiç kimse gitmedi.

GR: Tüm eserlere bir kişi katılmıştır, bunu atabiliriz (her üçünün olduğu seçeneği eliyor). "Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi" diyor, sırf kuleler, bunu da attım. "Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir", camiler ve kuleleri de attım. Murat ne camiye ne de kuleye gitmiş, o da saraylara gitmiş.

I: Sadece saraylara gitmiş değil mi?

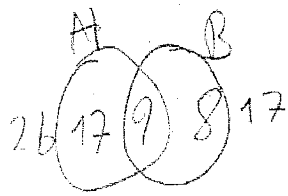
GR: Ezgi de sadece saraylara gitmiş. Demek ki yine iki olasılık kalıyor ya sadece camiler ya da saray ve kuleler.

I: Teşekkürler.

Appendix D.2. Sample from Good Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?

$s(H)=26$
$s(B)=17$
$s(B\cap H)=9$



$17 - 9 = 8$

$26 - 9 = 17$

$17 + 9 + 8 = 37$

$42 - 37 = 5$

Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

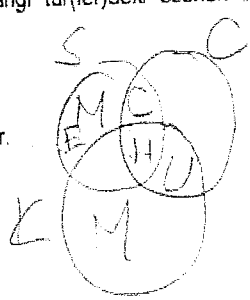
Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur. Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.



$C = S \cap C / K$

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

GR: Önce verilenleri yazdım. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynuyormuş. Yalnız hentbol oynayanları bulmak için 26'dan 9'u yalnız basketbol oynayanları bulmak için de 17'den 9'u çıkardım. Daha sonra birleşimi buldum, 17, 9 ve 8'i toplayarak. Ne hentbol ne basketbol oynayanları bulmak için de 42'den 37'yi çıkardım ve 5 buldum.

I: Tamam, teşekkürler, şimdi ikinci soru için ne düşündün anlatır mısın?

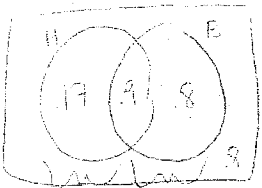
GR: Önce üç grup olduğu için saraylar kuleler ve camiler kümeleri seçtim verilen bilgilere göre kişileri yerleştirmeye çalıştım.

GR: Hakan tüm eserlere gittiği için onu üç kümenin de kesişimine koydum. Meltem Kız Kulesi'ne gitmiş onu kulelere koydum. Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gittiği için onu cami ve kulenin kesişimine, yalnız kule ve cami kısmına yazdım. Murat ise ne camiye ne kuleye gitmiş demek ki yalnızca saraylara gitmiş onun için onu buraya yazdım. Ezgi de saraylara gitmiş onu da buraya yazdım. Onun için Ceren yalnızca saray ve camilere gitmiştir.

I: Peki, teşekkürler.

Appendix D.3. Sample from Good Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?



26 17 8 → 42 kişi

26 − 9 = 17 → hentbol oynayan

17 − 9 = 08 → bb

17 + 9 + 8 = 34 kişi oynuyor

42 − 34 = 08 kişi

Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur. Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir.

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

Meltem → a) Yalnız kuleler
b) ~~kuleler + saraylar~~
c) ~~kule + cami~~

Hakan
her şey

Umut → a) kule + cami
b) ~~her şey~~

Murat → a) yalnız saraylar

Ezgi → a) ~~saraylar~~
(b) saray + kule ~~saray + cami~~

Olasılıklar
1 ~~Yalnız kuleler~~
2 Yalnız camiler
3 ~~Yalnız saraylar~~
4 ~~Yalnız kuleler ve camiler~~
5 ~~Yalnız kuleler ve saraylar~~
6 Yalnız camiler ve saraylar

Ceren bu ikisinden birine gitti.
~~Tüm eserler~~

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

GR: Soruyu okuyayım önce. (Birinci soruyu okur.)

GR: Ben burada kümelerle düşündüm. Hentbol ve basketbol oynayanları kesişimli küme yaptım. 9 kişi ikisinde de oynadığı için onu ortaya koydum. Bir tane de universal set yaptım o da 42 kişinin bulunduğu küme oldu.

GR: Şimdi toplam 26 kişi hentbol oynayabiliyor diyordu bunların 9'u hem hentbol hem basketbolda olduğundan 9'u çıkardım, kalan sırf hentbol oynayan olduğundan kümede yerine koydum. Aynı işlemi basketbolcular için de yaptım.

GR: Ondan sonra toplam kaç kişinin oynadığı burada görüldü. 17, 9 ve 8'i topladığımda kaç kişinin oynadığını buldum. Bunu da toplam kişi sayısından çıkardığında 8 kişi kaldı, bu da oynamayanlar.

I: İkinci sorunun çözümünü açıklar mısın?

GR: Burada toplam 7 kişi var ve bunlar 8 değişik gezinin olduğu bir programa katılıyorlar ve hepsi bu gezi programlarından en az bir tanesine gidiyorlar. Ben aslında 8. türün ne olduğunu bulamadım.

I: Hiçbiri. Aslında başta 8 değişik seçenek olduğunu söylüyor ancak ondan sonra bunlar en az bir tanesine gitti diyor. Onun için burada 8 seçenek yok aslında, 7 kişi için 7 seçenek var.

GR: İşte 7 seçenek kalınca 7 kişi olduğunda her birinin bir böyle ayırdığım gruplara gittiğini düşündüm. Elimden geldiğince gruplamaya çalıştım, tam olmadı. Çünkü iki kişinin tam ortasında kaldım.

I: Aslında kesin bir cevap yok. Ama kesinlikle şu-şuradadır dediğin birileri var mı?

GR: Meltem: yalnız kuleler, Umut: kule-cami; Murat: yalnız saray; Hakan burada dediği gibi her üçüne, ezgi'den emin değilim ama saray-kule diye düşündüm.

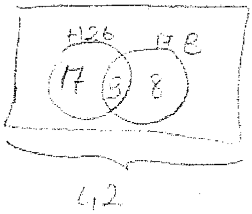
I: Buna göre Ceren ne olabilir?

GR: Hem Ceren hem Selim kaldı, hangisi olduğunu bilemiyorum. Ama Ceren yalnızca camilere ya da camiler ve saraylara gidebilir.

I: Teşekkürler.

Appendix D.4. Sample from Good Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?



26 − 9 = 17   17 − 9 = 8   17 + 9 + 8 = 34   42 − 34 = 08

Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur: Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

{Saraylar, Camiler}
{Saraylar, Kuleler}

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

GR: Önce bunları kümelere yerleştirdim. Ondan sonra ortak olanı ikisinden de çıkardım sadece hentbol oynayan ve sadece basketbol oynayanları buldum. Bir de bunların dışında oynamayan birkaç kişi sorduğu için bir universal set de yapmamız gerektiğini düşündüm. İkisini çıkarınca sırf hentbol oynayanlar, sırf basketbol oynayanlar bir de ikisini oynayanları topladım. Bunların toplamlarını da grubun sayısından çıkardım.

I: İkinci soruyu anladın mı?

GR: Çok karışık.

I: Hımm... çok karışık! Biraz anlatmaya çalışayım. (Soruda verilen bilgiler özetlenir.)

GR: Hımmm, tamam. "Meltem: Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi" diyor demek ki kuleler grubuna katıldı. Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiş.
Murat saraylara gitmiş, Ezgi de bu grup içindeymiş. Buna göre (biraz düşünür),

GR: Her üçüne gitmiş olamaz. O zaman ya saraylar-camiler ya saraylar-kuleler ya da kule-cami.

GR: (Tekrar kontrol ediyor.) Bunu (kule-cami) çıkartacağız çünkü Umut gitmiştir.

I: Tamam mı?

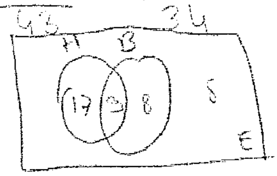
GR: Evet, bu kadar.

Appendix D.5. Sample from Good Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?

42 kişi
$n(H): 26$
$n(B) = 17$
$n(B \cap H) = 9$
$n(B \cup H)' = 9$

$26 + 17 = 43$ $\quad 43 - 9 = 34$ $\quad 42 - 34 = 08$ kişi $n(B \cup H)'$



Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler – Meltem
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı ✓	Sultanahmet Cami ✓ Süleymaniye Cami Çinili Cami ✓	Kız Kulesi ✓✓ Galata Kulesi ✓

Hakan – hepsi
Meltem – kuleler
Umut – ~~kuleler ve ca~~
Murat ~~kuleler cami~~
Ezgi – Saraylar

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur. Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır. — Kuleler ve camiler
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi. — Camiler
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir. — Saray ve camiler
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

I: Nasıl çözdüğünü açıklar mısın?

GR: İlk başta verilenleri sıraladım. Ve hentbol grubuna gidenler, basketbola ve her ikisine gidenler ve de hiçbirine gitmeyenleri sormuştu. Basketbol ve hentbola gidenleri topladım ama verilen kişi sayısından daha fazla çıkıyordu. Bu yüzden ikisinde de ortak hem basketbola hem de hentbola bu 43 kişiden çıkardım 34 kişi kalmıştı ve 42 kişilik grupsa 42 kişiden 34'ü çıkararak 8 kişinin hiçbirine katılmadığını buldum.

I: Tamam, çok güzel.

I: İkinci soru için neler düşünüyorsun, bazı notlar almışsın.

GR: Buna göre daha zordu ama bir mantık yürüttüm. Zaten bir kişi hepsine gidebiliyordu bu da Hakan'dı. Meltem sadece kulelere, Umut kuleler ve camilere, Ezgi de sadece saraylara gitmiştir.

I: Murat'ı tekrar okur musun?

GR: Ha yanlış okumuşum! Murat ne Çinili cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gitmiştir.

I: Nereye gitmiştir o zaman?

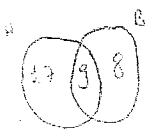
GR: Saraylara.

I: Yalnızca saraylara!?

GR: Buna göre Ceren'in nereye gittiğini sormuştu. Zaten sekiz tane seçenek olduğunu söylüyordu. Ona göre bazıları olabilirdi ama kuleler ve camiler, sadece camiler, sonra saraylar ve camiler olabilir, bu üç seçenek.

Appendix D.6. Sample from Good Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?



$$\begin{array}{r} 26 \\ -\ 9 \\ \hline 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ -\ 9 \\ \hline 08 \end{array} \text{ basket} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ 9 \\ +\ 8 \\ \hline 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42 \\ -\ 34 \\ \hline 08 \end{array}$$

08 ne hentbol ne basketbol oynuyor

Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur: Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir.

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

Ceren
Selim

Hakan hepsi
Meltem kuleler
Murat saraylar
Umut camiler ve kuleler
Ezgi saray
Ceren
Selim

Camiler ve saraylar
Camiler
Saraylar ve kuleler

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

GR: Önce burada hem hentbol hem basketbol oynadığını söylüyor. Onun için ikisinde de yalnız hentbol ve yalnız basketbol oynayanları bulmak için 9'u çıkardım ikisinden de. Daha sonra çıkan sonuçlarla, hem hentbol hem basketbol oynayan kişi sayısını topladım, normal kişi sayısından çıkardım ve 8 buldum.

I: Evet, ikinci soruyu anlayabildin mi?

GR: Tam olarak değil, ama...

I: Ne anladığını bana anlatır mısın?

GR: Üç günlük gezi için öğrenciler gelmiş, bunlar saraylara, camilere ya da kulelerden birine gidecekmiş, yalnız bunlardan bir tanesine gidiyorlarmış.

I: Her gün bir tanesine...

GR: Evet, her gün yalnızca bir tanesine... Burada 8 tane ayrı ayrı öğrenciler vermiş, sonuç olarak Ceren'in hangisine gittiğini öğrenmek istiyor. Burada ayrı ayrı yorumlar vermiş. Yorumlara göre çoğunun nereye gittiğini bulabiliriz

I: Mesela Hakan her üç türdeki yerlere gittiğine göre Hakan dışında 3 yere birden giden yok, onun için Ceren üçüne gitmiştir diyemeyiz.

GR: Evet, burada verilen diğer bilgileri eleyerek bulacağım.

GR: Burada yalnız biri tüm eserlere gitmiş diyor onun için bunu eleyebiliriz. Sadece bir hem kulelere, hem camilere gitmiş. Meltem burada Kız Kulesi'ne diyor ama cami hakkında bir şey demiyor. Ama Umut hem Galata Kulesi'ne hem de Sultanahmet Cami'yi gezdiğine göre hem kuleye hem camiye gitmiştir; onu böyle bulurum.

GR: Meltem sadece kuleleri gezmiş. Murat sarayları gezmiş, çünkü ne Çinili Cami ne de Kız Kulesi'ne diyor.

I: İstersen söylediklerini not al.

GR: (Not alarak) 8 kişi diyor ama burada 6 kişi var bir de Selim 7 kişi!

I: Hepsi hakkında bilgi vermemiş.

GR: Hakan: hepsi, Meltem: kuleler, Murat: saraylar, Umut: camiler ve kuleler, Ezgi: yalnızca saraylara çünkü Beylerbeyi sarayı...başka bir şey söylememiş.

I: Ama şimdi Murat da sadece saraylar, Ezgi de sadece saraylar olamaz değil mi?

GR: Evet, demek ki başka bir yer de olabilir.

GR: Elimizde bir de Ceren ve Selim kaldı.

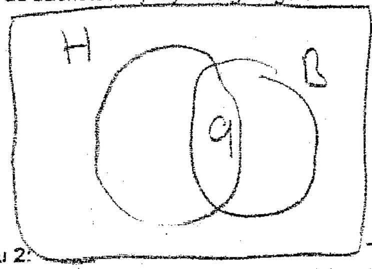
I: Peki elinde hangi seçenekler kaldı? Ceren nerelere gitmiş olabilir?

GR: Ceren şimdi cami ve saraylara gidebilir, camilere, saray ve kulelere olabilir, bu kadar.

I: Teşekkürler.

Appendix D.7. Sample from Average Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?



→42

$26 - 9 = 17$ kişi sadece hentbol oynuyor.

$17 - 9 = 8$ kişi sadece basketbol oynuyor.

$17 + 8 + 9 = 34$

$42 - 34 = 07$ kişi hiçbiri

Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur. Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir.

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Saraylar = Murat
Umut = Camiler ve kuleler

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
[redacted] hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
[redacted]: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim. → Saraylar
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

Ceren sadece Camiler grubuna gitmiştir.

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

AR: Şimdi, toplam 42 kişilik bir sporcu grubu olduğunu söylüyor. Onlardan 26 kişi hentbol oynuyor, bunlar içinde hem basketbol oynayanlar da var. 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir diyor. 9 kişi hem hentbol hem basketbol oynayabilmektedir diyor. Bu 9 kişi iki türde de oynadığı için yani bu 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiği için hem hentbol grubuna koymuşlar hem de basketbol grubuna koymuşlar.

AR: Bu nedenle sadece hentbol oynayan kişiyi bulmak için de 26'dan 9'u çıkartıyorum. Yani 17 kişi sadece hentbol oynuyormuş. Basketbol oynayanlardan da yani 17'den de 9'u çıkarttım, 8 buldum, yani 8 kişi de sadece basketbol oynuyor. Sonra sadece hentbol oynayanları sadece basketbol oynayanları ve ikisini de oynayanları topladığımda 34 ediyor, yani bunlar bir şekilde bir şey oynuyorlar. Ondan sonra bütün sporcu grubundan toplam kişiyi çıkardığımda 7 kişiyi yani hiçbirini oynamayanları buldum.

I: İkinci soru için ne düşünüyorsun?

AR: Biraz garip.

I: Genel olarak sorudan ne anladın, soruda ne anlatılmak isteniyor?

AR: Genel olarak pek bir şey anlamadım. Hangi konuya girdiğini anlayamadım: kümelere mi giriyor, neye giriyor?

I: Aslında bu soru bulmaca, mantık sorusu gibi...

AR: Haa, aslında mantık oyunlarını çözüyorum ben, çiziyorum da..

I: Yani mantık oyunu gibi düşün: 3 günlük bir gezi var, gezi boyunca saraylara, camilere ve kulelere gidiliyor. Her gün bunlara giden gruplar oluşturuluyor. Mesela sen herhangi bir gün saraylar grubuna katıldığında o gün burada yazılan tüm saraylara gidiyorsun ve o gün başka hiçbir yere gitmiyorsun. Üç gün sonunda bu grupların hepsine de katılmış olabilirsin, yalnızca saraylar grubuna da katılmış olabilirsin veya hiçbirine katılmazsın.

I: Burada bazı öğrenciler verilmiş, bunlar bu gezi gruplarından en az birine katılmış, ama her biri farklı gezilere katılmışlar: Mesela Hakan her üç türdeki gezilere de katılmış, Hakan dışında bu öğrencilerden hiçbiri her üç geziye de katılmamış. Bunu gibi verilen bilgilerden yola çıkarak Ceren'in hangi türdeki gezilere katıldığını bulabilir misin?

I: İstersen kümeleri de kullanabilirsin bu soruları çözmek için.

AR: Ben onu kullanmayacağım, eleyerek yapacağım.

I: Tamam, eleyerek yap o zaman.

AR: (Bir süre sonra) Peki şöyle bir şey oluyor mu: Meltem Kız kulesi'ne gitmişse Ceren de gidebiliyor mu?

I: Gidebilir, ama Meltem sadece kulelere gitmişse Ceren de sadece kulelere gitmiş olamaz.

AR: (Bir süre sonra) Peki saraylardan bir tanesine gidip, camilerin hepsine gidebilir mi?

I: Hayır. Saraylar grubuna katıldığında tüm saraylara gidiyorsun.

AR: Saraylara gitmenin belli bir sayısı yok mu? Mesela Hakan, Meltem, Umut ve Murat'ın birlikte saraya gitme ihtimali yok mu?

I: Belli bir sayı yok ama verilen bilgilerden yola kimlerin saraylara gitmiş olabileceğini kimlerin gitmediğini belki bulabilirsin.

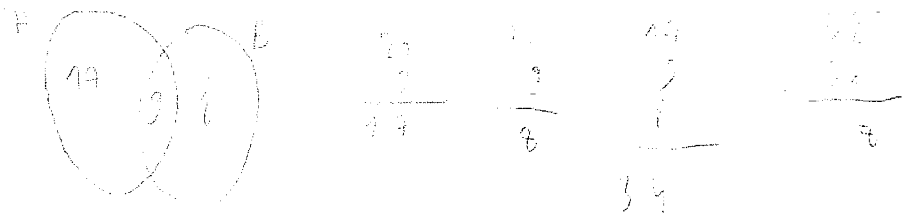
AR: Şurada bir tablo olsaydı daha kolay olurdu.

I: İstersen çizebilirsin.

AR: Sadece tahminde bulunabileceğim: Ceren sadece camilere gitmiştir.

Appendix D.8. Sample from Average Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?



Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camiilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur: Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

AR: Önce küme problemi olduğuna karar verdim ve iki tane kesişen küme çizdim; bir hentbol diğeri basketbol. 26 kişi hentbol oynuyormuş ama bu hentboldan kesişimi çıkararak yalnız hentbol oynayan kişileri buldum, 17, kesişime de 9 yazdım.

AR: Sonra basketbol oynayanlar da 17'di yine aynı şekilde sadece basketbol oynayanları buldum, 9 çıkardım, 8 kişi. Sonra oynamayanları sorduğu için hepsini toplayıp tamamından çıkardım, 8 kişi.

I: İkinci soruyu anlayabildin mi?

AR: Biraz zor geldi.

I: Ben biraz açıklayayım. (Soruda verilen bilgiler özetlenir.)

AR: Hıı, tamam. Meltem, Kız Kulesi'ne, Umut camiye, Murat da camiye…

I: Murat camiye değil bak: "Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim." demiş

AR: Haa, hiçbirine.

AR: Ezgi saraylara gitmiş.

I: Ceren'in gittiği yer hakkında tahminde bulunabilir misin?

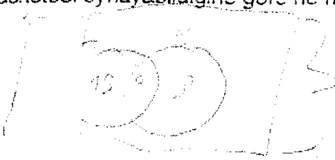
AR: Bence Beylerbeyi Sarayı… Çünkü Hakan üçüne gitmiş, Meltem… yok bir dakika.

I: Ezgi Beylerbeyi Sarayına gitti.

AR: O zaman camiye gitmiş olabilir, kuleye gitmiş olabilir. Bence bu kadar.

Appendix D.9. Sample from Average Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?



Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur. Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

AR: İlk başta kümeler çizdim. 42 kişilik sporcu grubu olduğu için evrensel küme çizdim. Sonra içine hentbol ve basketbol kümesi çizdim. Sonra hentbol oynayanlardan hem hentbol hem basketbol oynayanları çıkardım ve sırf hentbol oynayanları buldum. Aynı şeyi basketbolda da yaptım. Sonra sadece hentbol oynayanları, hem hentbol hem basketbol oynayanları ve bir de basketbol oynayanları toplayıp sporcu grubundan çıkardım.

I: İkinci sorunun çözümü için ne düşünüyorsun?

AR: Biraz zor, karışık…

I: Problemi anladın mı?

AR: Sayılır.

I: …(Soruda verilen bilgiler özetlenir.)

AR: Aslında kolaymış.

I: Peki nasıl çözebilirsin bu soruyu? İstersen şekil de çizebilirsin.

AR: Kafamdan yapsam, şekil çizmeden?

I: Peki sen nasıl istersen öyle çöz.

AR: Çinili Cami kesin.

I: Peki neden öyle düşünüyorsun?

AR: Başka kimse oraya gitmemiş.

Appendix D.10. Sample from Poor Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?

$26 - 9 = 17$ $\quad$ $17 - 9 = 08$ $\quad$ $17 + 8 = 25$ $\quad$ $42 - 25 = 27$

Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur: Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

Hakan: Hepsine
Meltem: Kulelere
Umut: Camiler ve kuleler
Murat: Saraylar
Ezgi: Saraylara

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

PR: Şimdi burada 42 kişilik bir grup var. 26 kişi hentbol 17 kişi de basketbol oynuyor. Burada önce kümeyi yazdım. Ondan sonra 26'dan 9'u çıkardım çünkü bunlar hem hentbol hem basketbol oynuyor. 17'den 9'u çıkardım, topladım. Grubun mevcudu da 42, ondan çıkardım. 27.

I: İkinci soruyu nasıl çözersin, soruyu anladın mı?

PR: Pek bir şey anlamadım.

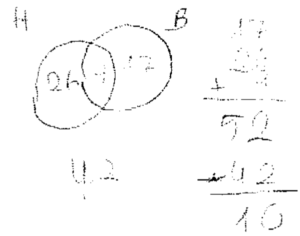
I: Ben kısaca anlatayım. (Soruda verilen bilgiler özetlenir.)

—Verilenleri yazıyor.

PR: Bulamıyorum.

Appendix D.11. Sample from Poor Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?



Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur. Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

Ceren Saraylar: Topkapı ve Yıldız Sarayı
Camiler, Çinili Cami

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

PR: Hepsini toplayıp 42'den çıkartacaktım, sonuç 42 çıktı.

I: Tekrar topla, bakalım.

PR: Hımm, 52'ymiş. O zaman 10 kişi.

I: Peki ikinci soruyu nasıl çözersin, sorudan ne anladığını anlatır mısın?

PR: Aslında pek bir şey anlamadım ama o kişilerin gittikleri yerleri "tik"ledim. Şimdi Ceren'i bulmaya çalışıyorum.

I: Peki, burada bazı kurallar söylüyor, her gün bir gruba katılabilirsin, hepsi aynı yerlere gidemiyor mesela Hakan her üç türdeki gezi grubuna katılmış onun dışında hiç kimse her üçüne de gidemez.

PR: Hı, hıı, anladım.

PR: Bir dakika... Topkapı Sarayı ve Çinili Cami olabilir.

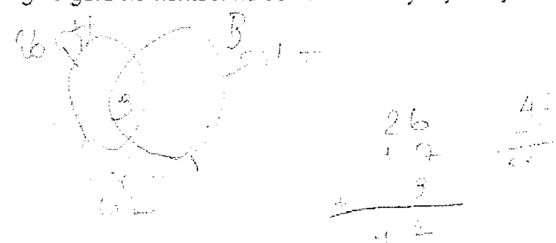
I: Yani saraylar ve camiler diyorsun.

PR: Hı, hıı.

Appendix D.12. Sample from Poor Representer's Interview

Soru 1:
42 kişilik bir sporcu grubunda 26 kişi hentbol, 17 kişi de basketbol oynayabilmektedir. 9 kişi hem hentbol hem de basketbol oynayabildiğine göre ne hentbol ne de basketbol oynayamayan kaç kişi vardır?

s(H∪B)=42
s(H)=26
s(B)=17
s(H∩B)=9



Soru 2:
Ankara'dan İstanbul'a 3 günlük gezi için öğrenciler gelmiştir. Her gün saraylara, camilere ve kulelere gitmek isteyenler için üç ayrı grup oluşturulmaktadır. Buna göre bir kişi günde yalnızca bir grup olmak üzere istediği bir gün herhangi bir gruba katılabilir. Ayrıca her bir öğrenci için en fazla 8 değişik olasılık vardır: yalnız saraylara gidebilir, yalnız saraylara ve camilere gidebilir, tüm eserlere gidebilir, vb.

Gezi programında yer alan eser türleri ve eserler aşağıda verilmiştir.

Saraylar	Camiler	Kuleler
Topkapı Sarayı Yıldız Sarayı Dolmabahçe Sarayı Beylerbeyi Sarayı	Sultanahmet Cami Süleymaniye Cami Çinili Cami	Kız Kulesi Galata Kulesi

Geziye katılan öğrenciler arasında Murat, Ceren, Ezgi, Selim, Meltem, Umut ve Hakan da bulunmaktadır. Her biri üç günlük gezi sonunda en az bir gezi grubunun içinde yer almışlardır. Ve her biri için yalnızca bir olasılık söz konusudur: Bu yedi öğrenciden yalnızca biri tüm eserlere, yalnızca biri hem kulelere hem de camilere, vs. gitmiştir

Buna göre, aşağıda verilen bilgiler doğrultusunda Ceren'in hangi tür(ler)deki eserleri ziyaret ettiğini bulabilir misiniz?

Hakan her üç türdeki gezi gruplarına katılmıştır.
Meltem: - Kız Kulesi'nden İstanbul'u seyretmek güzeldi.
Umut hem Sultanahmet Cami'ye hem de Galata Kulesi'ne gitmiştir.
Murat: - Ne Çinili Cami'ye ne de Kız Kulesi'ne gittim.
Ezgi Beylerbeyi Sarayı'na giden grup içindedir.

I: Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

PR: İlk başta verilenleri yazdım. Sonra küme şeklinde yazınca hentbol 26, basketbol 17, kesişim 9, birleşimi ise 42.

I: Evet, sonra ne yaptın?

PR: Şimdi hocam…

I: Orada 26, 7 ve 9'u toplamışsın, neden?

PR: İlk başta verilenleri topladım sonrasında onu toplam değerden çıkardım hiç oynayanları bulmak için sonuç sıfır çıktı.

I: Yani hiçbir şey oynamayan yokmuş, herkes bir şeyler oynuyormuş.

PR: Evet.

I: İkinci soruyu anladın mı, anlatmamı ister misin? (Soruda verilen bilgiler özetlenir.)

PR: Ben bu soruyu çözemeyeceğim.

I: Tamam, teşekkürler.

APPENDIX E: WORKSHEET FOR PROBLEM SOLVING STRATEGIES

PROBLEM SOLVING STRATEGIES

Let's work on a problem☺

In a class of 23 students, 15 of them speak English, 13 speak French and 2 speak none. Find the number of students who speaks only English.

1. **Take notes:**

First write what information is given to you.

15 speak English
13 speak French
2 speak none
23 students in the class

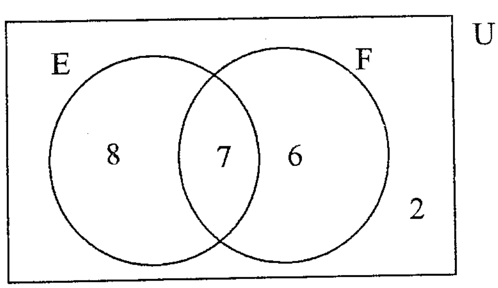
2. **Solve in more than one way:**

a. We can draw a diagram:

15+13+2=30

$30 - 23 = 7$

15 - 7=8



b. We can use the formula:

The formula is the following:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

3. More than one answer:

In set problems there is only one answer, but there are many other kinds of problems that you can face with more than one answer. For example, you will have many answers in divisibility rules problems (you will meet them at the end of this term)

4. Check for reasonabless:

You check the correctness of your answer:

Add all the values you put in the diagram:

8+7+6+2=23 (the total number of students in the class)

5. Choose an estimate or an exact amount:

Try to guess the answer from the given information:

The number of students who speak only English should be less than 15, because in 15 students there are some who speaks French as well.

6. Choose a calculation method:

You can calculate:

i) mentally,

ii) with a calculator, or

iii) with paper and pencil

7. Find needed information:

To find how many students speak English only, you should know how many of them speaks both, so you need this information first.

8. Ignore unneeded information:

Actually in this problem there is no unneeded information, but there are cases that you will see unneeded information.

9. Use logical reasoning:

If there were more than one answer, you could find the most possible and exact answer by eliminating the other possibilities. You will also meet such a case in divisibility problems.

APPENDIX F: WORKSHEET FOR WORD PROBLEMS ON SETS

REMEMBER !

both ..... and	refers	intersection (∩)
either ..... or	refers	union (∪)
only	refers	difference (\)
neither ..... nor ...	refers	complement (‘)

The number of elements of $A \cup B$:

If $A \cap B = \phi$ i.e A and B are disjoint sets, then $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

If $A \cap B \neq \phi$ then $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

PROBLEMS

1) In a group of children, 15 drink milk, 18 drink tea and the number of children who drink tea or milk is 25.
   a) How many children drink both milk and tea?
   b) How many of them drink only tea?

2) In a group of 42 people 19 of them play basketball and 28 of them play volleyball. How many of them play both?

3) In a class of 30 students 17 of them can speak English, 10 of them speak German and 5 of them speak both.
   a) How many students can speak neither English nor German?
   b) How many of them speak only one foreign language?

4) A shop has 52 customers. 30 of them bought bread, 12 of them bought both bread and cheese, and 48 of them bought bread or cheese.
   a) How many bought neither bread nor cheese?
   b) How many bought cheese but not bread?
   c) How many bought either cheese or bread but not both?

5) In a class of 20 students, 5 failed in their math exam, 7 failed in English and 3 of them failed both.

   a) How many of them failed at least one of these exams?

   b) How many did not fail either of these exams?

6) If $n(A)=7$, $n(A\cap B)=3$ and $n(A\cup B)=12$ then find $n(B)=?$

7) If $n(A-B)=5$, $n(A\cap B)=2$ and $n(B)=10$ then find $n(A\cup B)=?$

8) At the break, 123 pupils go to the school shop where sells bars of chocolate, bottles of lemonade, packets of biscuits. 42 of them buy packets of biscuits, 10 of them buy only lemonade, 10 of them buy lemonade and biscuits, 4 of them buy lemonade and chocolate but not biscuits, 15 of them buy biscuits and chocolate, 26 of them buy chocolate, 11 of them buy biscuits and chocolate but not lemonade.

   a) How many of them buy nothing at all?

   b) How many of them buy all the three products?

HOMEWORK

1) There are 30 pupils in a summer camp. 25 of them can swim, 18 ride a bicycle. How many of them can swim and ride a bicycle?

2) There are 35 students in a class. 24 of them like math, 27 of them like art and 19 of them like math and art.

   a. How many of them like at least one of these lessons?

   b. How many do not like either of them?

3) Out of 20 people 6 of them read Hürriyet and 4 read Sabah, 12 people read neither Hürriyet nor Sabah. How many of them read both newspapers?

4) There are 84 people in a travel group and each of them can speak either French or Italian. 56 of them can speak French and 42 of them can speak Italian.

    a. How many of them can speak both languages?
    b. How many of them can speak only French?
    c. How many of them can speak only Italian?
    d. How many of them can speak only one language?

5) A group of children are playing with colorful game cards. 8 have red cards, 12 have blue cards and 10 have white cards. 3 of them have blue and red cards, 5 of them have blue and white cards, 2 of them have red and white cards, and 1 of them has all three.

    a. How many of them have only blue cards?
    b. How many of them have red or white cards?
    c. How many of them have only white cards?
    d. How many of them have blue and red cards but not white?

APPENDIX G: WORKSHEET FOR WORD PROBLEMS ON SETS

KÜME PROBLEMLERİ

1) Bir meyve bahçesinde 20 vişne, 17 şeftali ve 9 tane de kayısı ağacı bulunmaktadır. Bu meyve bahçesinde toplam kaç meyve ağacı vardır?

2) 41 kişilik bir sporcu kafilesindeki sporculardan 26 kişi basketbol, 19 kişi voleybol oynamaktadır. Her iki oyunu da oynayan kaç sporcu vardır?

3) Bir sınıftaki öğrencilerden matematik dersinden sınıfı geçenler 18 kişi, Türkçe dersinden geçenler 24 kişi, her iki dersten sınıfı geçenler 7 kişi olduğuna göre sınıf mevcudunun kaç kişi olduğunu bulunuz.

4) Bir sınıftaki öğrencilerin her biri Almanca veya Fransızca dillerinden birini bilmektedir. 12 öğrenci Almanca, 10 öğrenci Fransızca ve 4 öğrenci hem Almanca hem de Fransızca bildiğine göre bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

5) 25 kişilik bir sınıfta, 9 kişi keman, 12 kişi piyano dersleri alıyor. Bu grupta 5 kişi ne keman ne de piyano dersi aldığına göre, her iki dersi alan kaç kişi vardır?

6) 30 kişilik bir yaz kampında herkes tenis veya İngilizce kurslarından birine gitmektedir. 17 kişi tenis, 21 kişi İngilizce kursuna gittiğine göre, yalnız tenis kursuna giden kaç kişi vardır?

7) 40 kişilik bir gezi grubunda 25 kişi İngilizce, 13 kişi Fransızca ve 5 kişi de her iki dili bildiğine göre, en çok bir yabancı dil bilen kaç kişi vardır?

8) A ve B dergilerinden en az birine abone olan 45 kişiden 32'si yalnızca A, 24'ü yalnızca B dergisine abone olduğuna göre her iki gazeteye abone olan kaç kişi vardır?

REFERENCES

Center of Teaching Excellence (CET), 2004, http://www.ku.edu/~cte/index.html.

Fennell, F. and T. Rowan, 2001, "Representation: An Important Process for Teaching and Learning Mathematics", *Teaching Children Mathematics*, Vol. 7, Iss. 5, pp. 288-294.

Gay, L. R. and P. Airasian, 2003, *Educational Research: Competencies for Analysis and Application*, Merrill Prentice Hall, New Jersey.

Goldin, G. and N. Shteingold, 2001, "System of Mathematical Representations and Development of Mathematical Concepts", In F. R. Curcio (eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook*, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Greeno, J. G. and R. B. Hall, 1997, "Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms", *Phi Delta Kappan*, Vol. 79, pp. 361-367.

Hegarty, M., R. E. Mayer and C. A. Monk, 1995, Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers, *Journal of Educational Psychology*, Vol. 87, Iss. 1, pp. 18-29.

Hiebert, J. and T. P. Carpenter, 1992, "Learning and Teaching With Understanding", In D. A. Grouws (eds.), *A Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan Library Reference Simon & Schuster Macmillan.

Hohn, R. L. and B. Frey, 2002, "Heuristic Training and Performance in Elementary Mathematical Problem Solving", *The Journal of Educational Research*, Vol. 95, Iss. 6, pp. 374-384.

Howard, B. C., S. McGee, N. S. Hong and R. Shia, 2001, "Computer-Based Science Inquiry: How Components of Metacognitive Self-Regulation Affect Problem-Solving", *American Educational Research Association.*

Izsak, A., 2003, "We Want a Statement That is Always True: Criteria for Good Algebraic Representations and the Development of Modeling Knowledge", *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 34, Iss. 3, pp. 191-211.

Jitendra, A., C. M. DiPipi and N. Perron-Jones, 2002, "An Exploratory Study of Schema-Based Word-Problem-Solving Instruction for Middle School Students with Learning Disabilities: An Emphasis on Conceptual and Procedural Understanding", *Journal of Special Education*, Vol. 36, Iss. 1, pp. 23-39.

Jitendra, A., 2002, "Teaching Student Math Problem-Solving through Graphic Representations", *Teaching Exceptional Children*, Vol. 34, Iss.4, pp.34-39.

Jonassen, D., 2003, "Using Cognitive Tools to Represent Problems", *Journal of Research on Technology in Education*, Vol. 35, Iss. 3, pp. 362-374.

Liutel, B. C., 2002, *Multiple Representations of Mathematical Learning*, Ph.D Thesis, Science and Mathematics Education Centre (SMEC). Curtin University of Technology.

Maccini, P. and K. T. Ruhl, 2000, "Effects of a Graduated Instructional Sequence on the Algebraic Subtraction of Integers by Secondary Students with Learning Disabilities" *Education and Treatment of Children*, Vol. 23, Iss. 4, pp. 465-478.

Miura, I. T., 2003, "The Influence of Language on Mathematical Representations", In F. R. Curcio (eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook*, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Montague, M. and B. Applegate, 2000, "Middle School Students' Perceptions, Persistence, and Performance in Mathematical Problem Solving", *Learning Disability Quarterly*, Vol. 23, Iss. 3, pp. 215-227.

Moreau, S. and D. Coquin-Viennot, 2003, "Comprehension of Arithmetic Word Problems by Fifth-Grade Pupils: Representations and Selection of Information", *British Journal of Educational Psychology*, Vol. 73, Iss.1, pp. 109-122.

Moyer, P. S., 2001, "Using Representations to Explore Perimeter and Area", *Teaching Children Mathematics*, Vol. 8, Iss. 1, pp. 52-59.

Pape, S. J. and M. A. Tchoshanov, 2001, "The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding", *Theory into Practice*, Vol. 40 Iss. 2, pp. 118-128.

Pape, S. J. and C. Wang, 2003, "Middle School Children's Strategic Behavior: Classification and Relation to Academic Achievement and Mathematical Problem Solving", *Instructional Science*, Vol. 31, pp. 419-449.

Pirie, S. E. B., 1998, "Crossing the Gulf Between Thought and Symbol: Language as Stepping Stones", In A. Sierpinska (eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Pyke, C. L., 2003, "The Use of Symbols, Words, and Diagrams as Indicators of Mathematical Cognition: A Causal Model", *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 34, Iss. 5, pp. 406-412.

Reimann, P. and M. T. H. Chi, 1989, "Human Expertise", In K. J. Gilhooly (eds.), *Human and Machine Problem Solving*, New York: Plenum.

Schoenfeld, A., 1987, "What's All the Fuss about Metacognition?" In A. Schoenfeld, (eds.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, pp. 189–215, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Shaw, K. L. and L. Aspinwall, 2002, "Representations in Calculus: Two Contrasting Cases", *The Mathematics Teacher*, Vol. 95, Iss. 6, pp. 434-444.

Stapel, E., 2004, Purple Math: Venn Diagrams III. http://www.purplemath.com /modules/venndiag3.htm.

Steinberg, L., J. Belsky and R. B. Meyer, 1991, Infancy, Childhood, Adolescence Development in Context, McGraw-Hill Inc.

Szetela, W. and C. Nicol, 1992, "Evaluating Problem Solving in Mathematics (Using Performance Assessment)", *Educational Leadership*, Vol. 49, Iss. 8, pp. 42 -46.

Yerushalmy, M. and S. Gilead, 1999, "Structures of Constant Rate Word Problems: A Functional Approach Analysis", *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 39, pp. 185-198.

Zhang, J., 1997, "The Nature of External Representation in Problem Solving", *Cognitive Science*, Vol. 21, Iss. 2, pp. 179-190.