

FOR REFERENCE

BAZI MATRİS GRUPLARININ KOHOMOLOJİSİ HAKKINDA

Dr. AYŞE KÜSEFOĞLU

Bogazici University Library



14

39001100374720

DOÇENTLİK TEZİ
EYLÜL 1980

ÖZET

Bu araştırmanın esas konusu, bazı matris gruplarının, bu matrislerin uygulandığı standart modüller üzerindeki birinci derece kohomoloji gruplarının ne olduklarını bulmaktır. R , birim elemanı olan herhangi bir halka ise, R^n ile gösterilen $n \times 1$ sütun matrisleri, bu halka üzerindeki genel lineer grubun elemanter matrisler tarafından doğurulan $E_n(R)$ alt grubunun standart modülünü oluşturmaktadır. Bu modül üzerinde $E_n(R)$ 'nin birinci derece kohomoloji grupları için başlıca şu sonuçlar elde edilmektedir:

1. R herhangi bir halka, $n \geq 4$ ise, $H^1(E_n(R), R^n) = 0$ 'dır. (Teorem 3.2.).
2. R herhangi bir halka, K ise, R 'nin komütatif bir althalkası olsun. Eğer K 'nin içinde $u^2 \neq 1$ olan bir aritmetik birim elemanı u varsa, o halde $H^1(E_3(R), R^3) = 0$ 'dır (Teorem 3.5.). Bu özelliği haiz halkalar arasında şunlar sayılabilir: 4'ten fazla elemanı olan bütün cisimler; $n \neq 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ ise modülo n tamsayılar halkası; Gauss tamsayıları halkası; K , yukarıda belirtilen özelliği haiz ise, K üzerindeki s değişkenli ($s \geq 1$) polinom halkaları veya kuvvet serileri halkaları; yahut bu örneklerden herhangi birini bir althalka olarak içeren başka bir halka.
3. Tamsayılar halkası, 2.'de açıklanan teoremin kapsamı dışında kalmasına rağmen, $n=2$ ve 3 için $H^1(E_n(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^n) = 0$ sonucu geçerli olmaktadır (Teorem 3.7.). Üstelik, eğer R , tamsayılar halkası üzerinde s değişkenli ($s \geq 1$) bir polinom halkası veya kuvvet serileri halkası ise, yine $n=2$ ve 3 için $H^1(E_n(R), R^n) = 0$ olduğu gösterilmektedir.
4. Eğer R bir cisim veya bir Öklid halkası ise, Teorem 3.1.'de her $n \geq 1$ için $E_n(R)$ matris grubunun, $SL_n(R)$ özel lineer grubunun tümüne eşit olduğu ispatlanmaktadır. Böylece yukarıdaki üç maddede belirtilen teoremlerin kapsamına giren her cisim ve her Öklid halkası için $H^1(SL_n(R), R^n)$ kohomoloji grubunun da triviyal olduğu ortaya çıkmaktadır. Zaten R sonlu bir cisim ise, $SL_n(R)$ sonlu bir Chevalley grubu olduğundan, bu halde $H^1(SL_n(R), R^n)$ kohomoloji gruplarının tümünü yapısı bilinmektedir. Bu araştırmanın katkısı, R bir cisim olmadığı takdirde kohomoloji grupları hakkında elde edilen sonuçlardır.

İÇİNDEKİLER

	sahife
Özet	ii
Kullanılan Simgeler	iv
I. GİRİŞ	1
II. KOHOMOLOJİ GRUPLARI	8
2.1. Birinci Derece Kohomoloji Grupları	8
2.2. İkinci Derece Kohomoloji Grupları	26
III. $GL_n(R)$ GRUBUNUN BAZI ALTGRUPLARININ, STANDART MODÜLLERİ ÜZERİNDEKİ KOHOMOLOJİ GRUPLARI.....	38
IV. KAYNAKLAR	68

KULLANILAN SİMGELER

\mathbb{Z}	tamsayılar halkası
\mathbb{Z}_n	modülo n tamsayılar halkası
\mathbb{Q}	rasyonel sayılar
\mathbb{R}	reel sayılar
\mathbb{C}	kompleks sayılar
$GF(q)$	q elemanlı sonlu cisim
$GL_n(\mathbb{R})$	\mathbb{R} halkası üzerindeki $n \times n$ singüler olmayan matrislerden oluşan genel lineer grup
$SL_n(\mathbb{R})$	\mathbb{R} komütatif halkası üzerindeki özel lineer grup
$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(M, N)$	M, N \mathbb{R} halkası için birer modül iseler, M 'den N 'ye tüm \mathbb{R} -modülü homomorfileri
$U(K)$	K komütatif halkasındaki tüm aritmetik birim elemanlarının oluşturduğu grup
I	birim matrisi
id_G	G grubu üzerinde birim tasvir
$f _H$	f tasvirinin H cümlesine kısıtlaması
V^G	bir G -modülü olan V 'deki tüm G -invariant elemanlar cümlesi
$A \times B$	A ile B 'nin Kartezyen çarpımı
$G \oplus H$	G ile H gruplarının direkt toplamı
$G \otimes H$	G ile H gruplarının direkt çarpımı
$x \circ v, x(v), xv$	$x \in G, v \in V, G$ bir grup, V bir G -modülü ise, x elemanının v ile çarpımı
\cong	izomorfi

I

GİRİŞ

Kohomoloji kavramı, önce homolojik cebirde ortaya atılmış olmasına rağmen, özellikle birinci ve ikinci dereceden kohomoloji gruplarının grup-teorik yorumları bilinmekte ve Lie tipi sonlu gruplarla diğer sonlu basit gruplar üzerinde yapılmakta olan araştırmalara ışık tutmaktadır. Buna karşıt olarak da, bu grupların bilinen özelliklerinden yararlanarak yeni kohomoloji gruplarını hesaplamak mümkün olmaktadır. Kısacası, kohomoloji ile gruplar teorisi arasında organik bir bağ kurulmuş durumdadır.

Genelde kohomoloji grupları, Ext fonktöründen elde edilirler. Eğer G herhangi bir grup, V de bir (sol) $\mathbb{Z}G$ -modülü ise, G 'nin, katsayıları V 'de olan n 'inci derece kohomoloji grubu $H^n(G, V)$, aşağıdaki bağıntıyla tanımlanır:

$$H^n(G, V) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, V).$$

Burada Ext fonktörünün anlamı, [10, VI. Bölüm]deki gibidir.

Eğer, \tilde{G} , V ile G 'nin bir semidirekt çarpımı ise, \tilde{G} grubunun içinde V 'nin, G grubuna izomorf olan bir tamamlayıcısı bulunacaktır. V 'nin tamamlayıcıları arasında belirli bir denklik bağıntısı kurmak ve elde edilen denklik sınıfları ile $H^1(G, V)$ grubunun elemanları arasında birebir bir

tekabül kurmak mümkündür. (Sonuç 2.1). Ayrıca, G 'den V 'ye giden ve her $x, y \in G$ için

$$f(xy) = xf(y) + f(x)$$

bağıntısını gerçekleyen tüm tasvirlerin oluşturduğu komütatif gruba $\text{Der}(G, V)$ adı verilirse, yine $H^1(G, V)$ grubu ile $\text{Der}(G, V)$ grubunun bir bölüm grubu arasında bir izomorfi olduğu ispatlanmıştır (Teorem 2.2). Pratikte izlenen bir yol, $\text{Der}(G, V)$ grubunu inceleyerek, G 'nin katsayıları V 'de olan birinci dereceden kohomoloji grubunun ne olacağını bulmak ve bundan da, V ile G 'nin semidirekt çarpımının yapısı hakkında bilgi edinmektir.

İkinci dereceden kohomoloji gruplarının gruplar teorisi yönünden yorumlanması ise şöyledir: yine G bir grup, V de bir ZG -modül, ve bu defa \tilde{G} , V grubunu normal bir altgrup olarak içeren ve $\tilde{G}/V \cong G$ izomorfisini gerçekleyen herhangi bir grup olsun. Bu özellikleri haiz \tilde{G} gruplarının, 2. bölümde tanımlanacak olan bir başka denklik bağıntısı altındaki denklik sınıfları ile, $H^2(G, V)$ grubunun elemanları arasında birebir bir tekabül vardır (Teorem 2.7). Üstelik, bu durumda, $H^2(G, V)$ grubunun etkisiz elemanı, V ile G 'nin semidirekt çarpımını içeren denklik sınıfına tekabül eder. Ayrıca, birinci dereceden kohomoloji gruplarındaki duruma paralel bir biçimde, $H^2(G, V)$ grubunun elemanlarını da

$$f(x, y) + f(xy, z) = xf(y, z) + f(x, yz), \quad x, y, z \in G$$

bağıntısını gerçekleyen belirli $f: G \times G \rightarrow V$ tasvirlerinin oluşturduğu grubun bir bölüm grubunun elemanları cinsinden tanım-

lamak mümkündür. Yine pratikte uygulanan bir yöntem, bu tür tasvirleri inceleyerek, $H^2(G, V)$ grubunun ne olduğunu ortaya çıkarmak ve dolayısıyla, V ile G 'nin semidirekt çarpımına denk olmayan \tilde{G} gruplarının var olup olmadıklarını saptamaktır.

Gruplar teorisi açısından önemli olan sorulardan biri de şudur: G, q elemanlı bir sonlu cisim üzerinde tanımlanan belirli bir Lie cebirine bağlı bir Chevalley grubu, V de G 'nin indirgenemeyen modüllerinden biri ise, o zaman $H^1(G, V)$ ve $H^2(G, V)$ kohomoloji grupları ne olacaktır? Farklı bir deyişle, $H^h(G, V)$ bu durumda $GF(q)$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğuna göre, bu vektör uzayının $GF(q)$ üzerindeki boyutu kaçtır? Çeşitli araştırmacıların katkıları ile, bu sorunun cevabı, ana hatlarıyla verilmiş durumda ise de, bazı özel hâller hâlâ çözüm beklemektedir. Genel olarak, G grubunun mertebesinin veya q sayısının ufak olduğu hâllerde (örneğin, $q = 2$ veya 3) kohomoloji gruplarının hesaplanması daha güç olmaktadır. Bu durum, hesaplar yukarıda tanımlanan tasvirler incelenerek de yapılırsa, Cline, Parshall ve Scott'un [6] ortaya çıkarmış oldukları ve daha Lie cebirsel esaslara dayanan bir teknik olan bazı kongrüansları inceleme yoluyla da olsa böyledir. Dolayısıyla, triviyal olmayan kohomoloji gruplarının genellikle yukarıda bahsedilen "ufak hâller"de ortaya çıkmasına hayret etmemek gerekir. Chevalley grupları üzerinde kohomolojik araştırmalarda bulunanlar arasında McLaughlin [16], Cline, Parshall ve Scott [6], Griess [8], Jones [11], Bell [3, 4, 5], Avrunin [1, 2], Landazuri [14], Sah [17, 18], Küsefoğlu [12, 13] ve başkaları sayılabilir. Birinci dereceden kohomoloji grupları ile ilgili bir kısım sonuçların bir özeti, [5, Tablo 4.5]'de verilmiştir. İkinci bölümde bu araştırmaların bazıları hakkında daha etraflı bilgi sunulacaktır.

Bu araştırmada ele alınan konu ise, bazı matris gruplarının, bu matrislerin uygulandığı standart modüller üzerindeki birinci derece kohomoloji gruplarının hesaplanmasıdır. Yukarıdaki paragrafta bahsedilen araştırmaların konusu olan gruplar, her zaman bir cisim üzerinde tanımlanmışlardır. Halbuki burada, herhangi bir halka üzerindeki matris grupları genel olarak ele alınmaktadır. Elde edilen sonuçlar, birinci derece kohomolojinin genelde yine triviyal olduğudur. R , birim elemanı olan herhangi bir halka olsun (R 'nin komütatif olması gerekmez). Eğer E_{ij} , i 'inci satırı ve j 'inci sütununun çakıştığı yerde 1, diğer bütün yerlerde de 0 olan $n \times n$ bir matris ise, o zaman

$$x_{ij}(t) = I + tE_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \quad t \in R$$

bağıntısıyla tanımlanan elemanter matrisler, R halkası üzerindeki singüler olmayan $n \times n$ matrislerin oluşturduğu $GL_n(R)$ genel lineer grubunun, $E_n(R)$ ile gösterilen bir alt grubunun doğururlar. Üstelik, Teorem 3.1.'e göre, R bir cisim veya bir Öklid halkası olduğunda, her $n \geq 1$ için $E_n(R)$ alt grubu, $SL_n(R)$ özel lineer grubunun tümüne eşittir. $E_n(R)$ grubunun, R^D modülü üzerindeki doğal etkisi göz önüne alınırsa, $H^1(E_n(R), R^D)$ kohomoloji grubu için aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir:

1. R , birim elemanı olan herhangi bir halka ise, $n \geq 4$ için $H^1(E_n(R), R^D) = 0$ olur (Teorem 3.2)*

* Bir komütatif G grubu triviyal ise, gerçekte $G = \{0\}$ yazmak daha doğrudur. Ancak bu araştırmada, notasyonu sadeleştirmek amacıyla $G = 0$ yazılacaktır.

2. R , birim elemanlı herhangi bir halka, K ise R 'nin komütatif bir althalkası olsun. Eğer K , bir güçlü aritmetik birimi içeriyorsa, o zaman $H^1(E_3(R), R^3) = 0$ sonucu geçerlidir (Teorem 3.4).

Burada, "güçlü aritmetik birim"den kastedilen şudur: Eğer K komütatif halkasındaki bir aritmetik birim elemanı u için, $u^3 - u$ elemanı da bir aritmetik birim oluyorsa, u 'ya bir *güçlü aritmetik birim* adı verilir. Bundan sonra yukarıdaki sonuç şöyle genişletilmektedir:

3. R , birim elemanlı herhangi bir halka, K ise R 'nin komütatif bir althalkası olsun. Eğer K 'da, $u^2 \neq 1$ olan bir aritmetik birim elemanı u varsa, o zaman yine $H^1(E_3(R), R^3) = 0$ olur (Teorem 3.5).

2. veya 3.'de belirtilen özellikleri haiz halkalar arasında şunlar sayılabilir: 4'ten fazla elemanı olan bütün cisimler; $n \neq 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ ise \mathbb{Z}_n ; Gauss tamsayıları halkası; K , güçlü bir aritmetik birim elemanını haiz bir komütatif halka ise, K üzerindeki s değişkenli ($s \geq 1$) polinom halkaları veya yine s değişkenli ($s \geq 1$) kuvvet serileri halkaları; yahut yukarıda verilen örneklerden herhangi birini bir althalka olarak içeren başka bir halka. Tabii ki bunlardan Teorem 3.1.'in kapsamına girenler için özel lineer grubun, standart modülü üzerindeki birinci derece kohomolojisinin de triviyal olduğu sonucu çıkmaktadır.

2. ve 3.'ün kapsamına girmeyen bir önemli halka, tamsayılar halkasıdır. Ancak bu halka için Teorem 3.7. de $n=2$ ve 3 olduğunda $H^1(SL_n(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^n)$ grubunun triviyal olduğu ispatlanmaktadır. Ayrıca buradan, eğer R , tamsayılar halkası üzerinde s değişkenli ($s \geq 1$) bir polinom hal-

kası veya s değişkenli ($s \geq 1$) bir kuvvet serileri halkası ise, yine $n=2$ ve 3 için $H^1(SL_n(R), R^n)$ grubunun da triviyal olduğu sonucu çıkarılmaktadır.

Bu araştırmada ele alınan konularla ilgili çeşitli yeni problemler ortaya atılabilir. Şüphesiz, yapılması gereken işlerin başında, burada birinci derece kohomoloji grupları için elde edilen sonuçları, ikinci derece kohomoloji gruplarına genellemek, daha doğrusu, çeşitli R halkaları için $H^2(L_n(R), R^n)$ grubunun ne olacağını bulmak gelir. Ancak, bu soruyu cevaplamak için yeni yöntemler geliştirmek gerektiği aşikârdır. Zira eğer $H^1(G, V)$ grubunun bir elemanı, yani bir derivasyon, G grubunu doğuran bir elemanlar kümesi üzerinde sıfıra eşitse, o derivasyonun genelde de sıfıra eşit olması gerekir; bu araştırmada bu özellikten defalarca yararlanılmıştır. Oysa, $H^2(G, V)$ grubunun elemanları için aynı şey geçerli değildir. Dolayısıyla, ikinci derece kohomoloji gruplarında cevaplanması gereken açık problemler vardır.

Ayrıca, yine bazı halkalar üzerindeki matris gruplarıyla ilgili başka ilginç problemler de akla gelmektedir. R , birim elemanlı bir komütatif halka, S de bu halka üzerinde s değişkenli ($s \geq 1$) kuvvet serileri halkası olsun. Bu durumda $GL_n(R)$ genel lineer grubundaki matrisler, S halkası üzerine birer otomorfi olarak uygulanabilirler. Eğer $U(S)$, S halkasındaki aritmetik birim elemanlarının oluşturduğu grup ise, o zaman $U(S)$, bir $GL_n(R)$ -modülü, dolayısıyla da genel lineer grubun herhangi bir altgrubu G için bir G -modülü olur. O halde, $i=1$ veya 2 için, $H^i(G, U(S))$ ne olacaktır? Bu genel problemin çözülmüş olan bir hâli [5] şudur: R , karakteristiği p ($p>0$) olan bir mükemmel cisim, $n=p^2$ olsun. Eğer G , mertebesi n olan bir devresel grup

ise, bu grup, R üzerindeki n değişkenli kuvvet serileri halkası olan S' 'ye, serilerin bilinmeyenlerini devresel olarak değiştirmek yoluyla uygulanabilir. O takdirde $H^1(G, U(S))=0$ sonucu geçerlidir. Genel lineer grubun başka altgrupları için, veya farklı özellikleri haiz halkalar için henüz bu tür hiçbir sonuç elde edilmemiştir.

II

KOHOMOLOJİ GRUPLARI

Bu bölümde kohomoloji grupları hakkında genel bilgi verilecek ve bu konuda bugüne dek yapılmış araştırmalar ana hatlarıyla özetlenecektir. Bu arada ilginç bazı uygulamalar da yapılacak, örneğin Hilbert'in 90. teoremi, belirli bir kohomoloji hesabının sonucu olarak elde edilecektir. G herhangi bir grup, V de bir $\mathbb{Z}G$ - modülü ise, G 'nin, katsayıları V 'de olan n 'inci derece kohomoloji grubu $H^n(G, V)$ 'nin

$$H^n(G, V) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, V)$$

bağıntısıyla tanımlandığı, birinci bölümde belirtilmişti. Bu araştırmanın konusu $n=1$ veya 2 durumlarıyla ilgili olduğu için, burada genel n için Ext fonktörünün tanımı verilmeyecek, bunun yerine birinci ve ikinci derece kohomolojinin gruplar teorisi açısından önemi üzerinde durulacaktır.

2.1. BİRİNCİ DERECE KOHOMOLOJİ GRUPLARI

Birinci derece kohomoloji grupları, semidirekt grup çarpımlarıyla ilgilidir. G herhangi bir grup, V de bir $\mathbb{Z}G$ -modülü* olsun. V ile G 'nin semidirekt çarpımı olan

*Sözü edilen her modül, sol bir modül olacaktır. Ayrıca, " $\mathbb{Z}G$ -modül" yerine kısaca " G -modül" denecektir.

\tilde{G} grubu, cümle olarak V ile G 'nin Kartezyen çarpımına eşittir ve \tilde{G} 'daki grup operasyonu, $v, w \in V, x, y \in G$ için

$$(v,x) \cdot (w,y) = (v+x(w), xy) \quad \dots (2.1)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Burada $x(w)$ veya $x \cdot w$, $x \in G$ 'nin, bir G -modülü olan V 'nin w elemanı üzerindeki etkisini ifade etmektedir. \tilde{G} grubunun birim elemanınının $(0, 1)$ olduğu* ve $v \in V, x \in G$ için

$$(v,x)^{-1} = (-x^{-1}(v), x^{-1}) \quad \dots (2.2)$$

olacağı aşikârdır.

Yukarıda tanımlanan semidirekt çarpım ,

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1 \quad \dots (2.3)$$

bölünen tam dizi 'sini verir. Burada $v \in V, x \in G$ için

$$i(v) = (v, 1) \text{ ve } \pi(v, x) = x$$

olmaktadır. Bir tam dizinin bölünmesinden kastedilen şey

* Komütatif olduğu bilinen gruplarda (örneğin V) toplama operasyonu kullanılacak ve birim elemanı 0 olarak alınacak, buna karşılık diğer durumlarda çarpma operasyonu kullanılacak ve birim elemanı 1 ile gösterilecektir.

ise, G 'den \tilde{G} 'ya giden ve $\pi \circ \theta = id_G$ bağıntısını gerçekle-
leyen bir θ homomorfisinin mevcut olmasıdır. \tilde{G} 'nin bir
semidirekt çarpım olması, örneğin $x \in G$ için $\theta(x) = (0, x)$ yo-
luyla tanımlanan tasvirin bu özelliği haiz olmasını garan-
tiler. Yine bu durumda V 'nin \tilde{G} içindeki resmi olan $i(V)$,
 \tilde{G} 'nin komütatif ve normal bir alt grubu, $\theta(G)$ ise, bu
alt grubun bir tamamlayıcısıdır. Yani,

$$i(V) \cap \theta(G) = \{(0, 1)\} \text{ ve } i(V)\theta(G) = \tilde{G}$$

bağıntıları gerçekleşmektedir. Üstelik \tilde{G} 'daki bir (v, x)
elemanının $i(V)$ üzerinde konjügasyon yoluyla olan etkisi,
 $x \in G$ elemanının, V 'nin üzerine V 'nin bir G -modülü olması
dolayısıyla yaptığı etkinin aynısıdır. Dolayısıyla, V
ile G 'nin semidirekt çarpımından bahsetmekle (2.3) bölünen
tam dizisinden söz etmek aynı şeydir.

G ile V , yukarıdaki gibiyse, her $x, y \in G$
için

$$d(xy) = xd(y) + d(x) \quad \dots (2.4)$$

bağıntısını gerçekleyen bir $d: G \rightarrow V$ tasvirine G 'den
 V 'ye bir *derivasyon* adı verilir. Tüm derivasyonlar cümlesi
 $Der(G, V)$ ile gösterilirse, bu cümlenin fonksiyon toplama
altında bir komütatif grup teşkil ettiği aşikârdır. Ay-
rıca $d \in Der(G, V)$ için

$$d(1) = 0 \quad \text{ve} \quad d(x^{-1}) = -x^{-1}d(x), \quad x \in G \quad \dots (2.5)$$

olduğu da açıktır. G 'nin V üzerindeki etkisinin triviyal olması hâlinde de, (2.4) bağıntısından görüleceği gibi, G 'den V 'ye bir derivasyon, yalnızca bir grup homomorfisi olur.

$\text{Der}(G, V)$ grubuyla Ext^1 fonktörü arasındaki ilişkiyi belirlemek için

$$0 \rightarrow I_G \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \dots (2.6)$$

tam dizisi gözönüne alınmalıdır. Buradaki tamsayılar kat-sayıllı grup halkası $\mathbb{Z}G$, $\{x \mid x \in G\}$ bazlı bir serbest \mathbb{Z} -modülü, ε homomorfisi de

$$\varepsilon\left(\sum_{x \in G} a_x x\right) = \sum a_x, \quad a_x \in \mathbb{Z}$$

olarak tanımlanmaktadır. I_G ise, ε epimorfisinin çekirdeği olan *ogmentasyon ideali*'dir. I_G , bir \mathbb{Z} -modülü olarak $\{x-1 \mid x \in G\}$ bazı üzerinde serbesttir. Bu durumda, aşağıdaki sonuç geçerlidir [10, VI. Bölüm]:

Teorem 2.1. G herhangi bir grup, V de bir $\mathbb{Z}G$ -modülü ise,

$$\eta(d)(x-1) = d(x) \quad x \in G, d \in \text{Der}(G, V)$$

bağıntısıyla tanımlanan η tasviri, $\text{Der}(G, V)$ ve $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I_G, V)$

grupları arasında doğal bir izomorfidir.

İspat :

$d \in \text{Der}(G, V)$ ise, I_G 'nin bir serbest \mathbb{Z} -modülü olması dolayısıyla $\eta(d)$ bir grup homomorfisi olacaktır. Üstelik $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} \eta(d)(x(y-1)) &= \eta(d)(xy-1)-(x-1) \\ &= d(xy) - d(x) \\ &= xd(y) \\ &= x\eta_d(y-1) \end{aligned}$$

olduğundan, $\eta(d)$ aynı zamanda bir G -modülü homomorfisidir. Buna karşıt olarak, eğer $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I_G, V)$ verilmişse,

$$d_\phi(x) = \phi(x-1)$$

bağıntısıyla tanımlanan d_ϕ , G 'den V 'ye bir derivasyondur, çünkü $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} d_\phi(xy) &= \phi(xy-1) \\ &= \phi(x(y-1) + x-1) \\ &= x\phi(y-1) + \phi(x-1) \\ &= x d_\phi(y) + d_\phi(x). \end{aligned}$$

Böylece, η 'nin bir izomorfi olduğu aşikârdır.

Λ , birim elemanlı bir komütatif halka olsun. Eğer,

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0 \quad \dots (2.7)$$

bir Λ -modülü tam dizisi ve P de projektif bir Λ -modülü ise [10, s. 17, Teorem 2.2.], herhangi bir Λ -modülü B verildiğinde

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon^*} \text{Hom}_{\Lambda}(P, B) \xrightarrow{\mu^*} \text{Hom}_{\Lambda}(R, B)$$

tam dizisi elde edilir. Buradan

$$\text{Ext}_{\Lambda}^1(A, B) = \text{Hom}_{\Lambda}(R, B) / \mu^*(\text{Hom}_{\Lambda}(P, B)) \quad \dots (2.8)$$

olarak tanımlanır [10, s. 89]. Bu tanım, A modülünün (2.7)'de verilmiş olan projektif prezantasyonundan bağımsızdır.

$\mathbb{Z}G$ bir serbest, dolayısıyla projektif bir $\mathbb{Z}G$ -modülü olduğuna göre, (2.6) tam dizisi \mathbb{Z} için bir projektif prezantasyon olmaktadır. Dolayısıyla, (2.8)'e göre

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(\mathbb{Z}, V) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I_G, V) / \mu^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, V)) \quad \dots (2.9)$$

elde edilir. Buradaki μ^* tasviri, $\mu: I_G \rightarrow \mathbb{Z}G$ monomorfinin doğurduğu bir homomorfidir. Teorem 2.1.'e göre ise

$$\text{Der}(G, V) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I_G, V)$$

olmaktadır. Üstelik, eğer $f \in \mu^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, V))$ ise, $f(1)=v_0$.

elemanı f' 'yi tanımlamaya yeterlidir, ve eğer $d_f: G \rightarrow V$, Teorem 2.1'deki izomorfi altında f' 'e tekabül eden derivasyon ise, f bir $\mathbb{Z}G$ -homomorfi'si olduğu için,

$$d_f(x) = f(x-1) = (x-1)f(1) = (x-1)v_0 \quad x \in G$$

olacağından, v_0 , d_f 'yi de belirlemeye yeterlidir. Karşıt olarak da, eğer bir d derivasyonu için öyle bir $w_0 \in V$ varsa ki, her $x \in G$ için

$$d(x) = (x-1)w_0 \quad \dots (2.10)$$

olarak ifade edilebilsin, o zaman d 'ye tekabül eden $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I_G, V)$ elemanını

$$f(1) = w_0$$

yoluyla $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, V)$ 'ye genişletmek mümkündür, yani $f \in \mu^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, V))$ olur. (2.10) tipi bir bağıntı ile tanımlanan bir derivasyona *iç derivasyon* denirse, tüm iç derivasyonlar cümlesi olan $\text{Der}_0(G, V)$ 'nin, $\text{Der}(G, V)$ 'nin bir alt grubu olacağı aşikârdır. Üstelik, Teorem 2.1.'de verilen izomorfi altında $\text{Der}_0(G, V)$ 'nin, $\mu^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, V))$ 'ye tekabül ettiği görülmektedir. Böylece (2.9) bağıntısının ışığı altında şu sonuç elde edilir [10, s. 195; 9, s. 45]:

Teorem 2.2.

G herhangi bir grup, V de bir G -modülü ise, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(\mathbb{Z}, V)$ ve $\text{Der}(G, V)/\text{Der}_0(G, V)$

grupları arasında doğal bir izomorfi vardır.

G 'nin, katsayıları V 'de olan birinci derece kohomoloji grubu,

$$H^1(G, V) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(\mathbb{Z}, V)$$

olarak tanımlandığına göre, $H^1(G, V)$ kohomoloji grubunu, G 'den V 'ye derivasyonlar grubunun bir bölüm grubu olarak düşünmek mümkündür. $H^1(G, V)$ grubunun daha grup-teorik bir açıklaması da aşağıda verilecektir.

G bir grup, V 'de bir G -modülü ise, G ile V 'nin bir semidirekt çarpımı \tilde{G} vardır ve

$$0 \rightarrow V \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

dizisi, bir $\theta: G \rightarrow \tilde{G}$ homomorfisi ile bölünür. $\pi \circ \theta = \text{id}_G$ olduğuna göre,

$$\theta(x) = (d(x), x), \quad x \in G \quad \dots (2.11)$$

bağıntısıyla tanımlanan bir $d: G \rightarrow V$ tasviri elde edilir.

$$\theta(xy) = \theta(x)\theta(y) \quad x, y \in G$$

bağıntısının ilk (yani V) koordinatları hesaplanırsa

$$d(xy) = xd(y) + d(x)$$

olduğu görülür; yani d , bir derivasyondur. Karşıt olarak da eğer $d \in \text{Der}(G, V)$ ise, bu defa (2.11) bağıntısıyla tanımlanan θ, G 'den \tilde{G} 'ya bir homomorfi olur ve $\theta \circ \theta = \text{id}_G$ eşitliğini gerçekleştirir. Böylece, (2.3) tam dizisini bölen θ homomorfileri cümlesi ile $\text{Der}(G, V)$ arasında birebir bir tekabül kurulur. Üstelik, bu türden her θ, V 'nin \tilde{G} 'da bir tamamlayıcısını (yani $\theta(G)$) verdiği için, V 'nin \tilde{G} 'daki tamamlayıcıları ile $\text{Der}(G, V)$ arasında da birebir bir tekabül elde edilmiş olur.

G_1 ve G_2, V için \tilde{G} grubunda birer tamamlayıcı, d_1 ve d_2 de, yukarıda açıklanan biçimde bu grüplara tekabül eden derivasyonlar olsun. Eğer G_1 ve G_2, \tilde{G} grubunda konjüge iseler, yani

$$G_1^{(v,x)} = (v,x)G_1(v,x)^{-1} = G_2 \quad \dots (2.12)$$

bağıntısını gerçekleyen bir $(v, x) \in \tilde{G}$ varsa, o takdirde (2.2)'yi kullanarak, her $y \in G$ için

$$(v,x)(d_1(y), y)(-x^{-1}(v), x^{-1}) \in G_2$$

olması gerektiği görülür. (2.1)'e göre bu üçlü çarpım açılırsa

$$(v, x)(d_1(y), y)(-x^{-1}(v), x^{-1}) = (v + xd_1(y) - xyx^{-1}(v), xyx^{-1})$$

elde edilir. Yani, her $y \in G$ için

$$d_2(xyx^{-1}) = v + xd_1(y) - xyx^{-1}(v)$$

yahut da

$$d_2(y) = v + xd_1(x^{-1}yx) - y(v)$$

bulunur. (2.4) ve (2.5)'ten ise

$$\begin{aligned} xd_1(x^{-1}yx) &= x \{x^{-1}d_1(yx) + d_1(x^{-1})\} \\ &= yd_1(x) + d_1(y) - d(x) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$d_2(y) = d_1(y) + (y-1) \{d_1(x) - v\}$$

sonucu çıkar. Kısacası, $d_2 - d_1$, $d_1(x) - v$ sabit elema-

nının belirlediği bir iç derivasyondur. Karşıt olarak da, eğer $d_1 - d_2 \in \text{Der}_0(G, V)$ ise, d_1 ve d_2 'ye tekabül eden tamamlayıcılar arasında (2.12) ile verilen bir ilişki vardır. Elde edilen sonuç şöyle olmaktadır:

Teorem 2.3. G herhangi bir grup, V bir G -modülü, \tilde{G} da bu durumdan elde edilen semidirekt çarpım olsun. G_1 ve G_2 , \tilde{G} içinde V 'nin birer tamamlayıcısı, d_1 ve d_2 de bu tamamlayıcılara tekabül eden derivasyonlar ise, G_1 ve G_2 'nin \tilde{G} içinde konjüge olmaları için gerek ve yeter şart, $d_1 \equiv d_2 \pmod{\text{Der}_0(G, V)}$ 'dir.

Teorem 2.2., Teorem 2.3. ve $H^1(G, V)$ 'nin tanımından çıkan sonuç ise, birinci derece kohomoloji gruplarının grup-teorik bir yorumunu vermektedir:

Sonuç 2.1. G herhangi bir grup, V bir G -modülü olsun. $H^1(G, V)$ grubunun elemanları ile, V 'ye, \tilde{G} semidirekt çarpımı içinde tamamlayıcı olan altgrupların konjügasyon altında belirlenen denklik sınıfları arasında birebir bir tekabül vardır. $H^1(G, V)$ grubunun triviyal olduğu özel hâlde ise, V 'nin bütün tamamlayıcıları tek bir denklik sınıfı altında toplanırlar.

Birinci derece kohomoloji grupları hakkında bilinen sonuçlar özetlenmeden önce ufak bir uygulama yapılacaktır ve bunun sonucu olarak da Hilbert'in 90. Teoremi elde edilecektir.

K herhangi bir cisim, G de K üzerine uygulanan bir otomorfiler grubu olsun. Bu durumda,

$A = K$ cisminin toplama altında meydana getirdiği grup,

$M = K$ cisminin sıfırdan farklı elemanlarının çarpma altında meydana getirdikleri grup

ise, A ve M , birer G -modülü olacaklardır.

Teorem 2.4.

K herhangi bir cisim, G de K üzerine uygulanan sonlu bir otomorfi grubu olsun. O zaman,

$$H^1(G, A) = H^1(G, M) = 0$$

sonucu geçerlidir.

İspat :

Burada yalnızca $H^1(G, M)=0$ sonucu ispatlanacaktır; $H^1(G, A)=0$ da benzer bir yöntemle elde edilebilir. f, G 'den M 'ye herhangi bir derivasyon olsun. G 'nin elemanları lineer bağımsız olduklarına ve her $\sigma \in M$ için $f(\sigma) \in M$, yani $f(\sigma) \neq 0$ olduğu için, $\sum_{\sigma \in G} f(\sigma)\sigma$ tasviri, sıfırdan farklıdır. Yani, öyle bir $z \in K$ bulunabilir ki,

$$y = \sum_{\sigma \in G} f(\sigma)\sigma(z) \neq 0$$

olur. Eğer $\tau \in G$ ise,

$$\tau(y) = \sum_{\sigma \in G} \tau(f(\sigma))(\tau\sigma)(z)$$

bağıntısından

$$f(\tau)\tau(y) = \sum f(\tau) \tau(f(\sigma))(\tau\sigma)(z) \quad \dots (2.13)$$

elde edilir. Halbuki f bir derivasyon olduğu için (2.4)'e göre

$$f(\tau\sigma) = f(\tau)\tau f(\sigma) \quad \dots (2.14)$$

olmalıdır. (2.14), (2.13)'e uygulanırsa

$$f(\tau)\tau(y) = \sum_{\tau\sigma \in G} (\tau\sigma)(z) = y$$

ve dolayısıyla

$$f(\tau) = y\tau(y)^{-1} = (y^{-1})^{-1}\tau(y^{-1})$$

olduğu görülür. Yani, f , $y \in M$ tarafından belirlenen bir iç derivasyondur. Teorem 2.2.'ye göre bu $H^1(G, M) = 0$ demektir.

İkinci olarak sonlu devresel grupların kohomolojilerinin hesaplanmasıyla ilgili bir sonuç verilecektir. $G = \langle x \rangle$, mertebesi n olan sonlu bir devresel grup, V de

bir G -modül olsun. Bu durumda ZG grup halkasında

$$N = 1+x+x^2+ \dots x^{n-1}$$

$$\text{ve } D = x-1$$

elemanları tanımlanabilir. Bu elemanlar V 'ye uygulandıkları vakit, D 'nin resmi $D(V)$, N 'nin çekirdeği olan $\text{Ker}N$ altmodülünün içine düşecektir. Bu durumda aşağıdaki teorem, $H^1(G, V)$ 'nin hesaplanması için bir formül vermektedir. (Bu teorem, [9, s. 40]'da verilen teoremin bir özel hâli olmaktadır.)

Teorem 2.5. $G=(x)$ mertebesi n olan sonlu devresel bir grup, V de herhangi bir G -modül ise, $H^1(G, V)$ grubu, $\text{Ker}N_{/D(V)}$ 'ye izomorftur.

İspat : Eğer $d \in \text{Der}(G, V)$ ise, her $0 \leq k \leq n-1$ için

$$d(x^k) = (1+x+\dots+x^{k-1})d(x) \quad \dots (2.15)$$

olacağından, d derivasyonu, $d(x)$ elemanı tarafından belirlenir. $x^n=1$ olduğuna göre (2.5) ve (2.15)'ten

$$0 = d(x^n) = (1+x+\dots+x^{n-1})d(x) = N d(x)$$

elde edilir. Karşıt olarak, eğer $Nd(x)=0$ ise, (2.15) ile tanımlanan d tasviri bir derivasyon olacaktır. Yani, $\text{Ker}N = \text{Der}(G, V)$ 'dir. Şimdi, d bir iç derivasyon ise,

$$d(x) = (x-1)v_0 = Dv_0$$

bağıntısını gerçekleyen bir $v \in V$ vardır. Bundan da $D(V) = \text{Der}_0(G, V)$ sonucu ortaya çıkar. Teorem 2.2.'ye göre ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 2.2. G ile V , Teorem 2.5.'deki gibi olsun. Eğer V , triviyal bir G -modülü ise, o zaman

$$H^1(G, V) \cong \{v \in V \mid nv=0\}$$

izomorfisi vardır.

İspat : Bu durumda herhangi bir $v \in V$ için

$$Nv = (1+x+\dots+x^{n-1})v = nv$$

$$\text{ve } Dv = (x-1)v = v-v = 0$$

bağıntılarından istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 2.2.'nin ilginç bir uygulaması olarak, Hilbert'in 90. Teoremi elde edilebilir:

Sonuç 2.3. K ve L cisimlerinden oluşan $K \subseteq L$ genişlemesi devresel ve sonlu dereceli olsun (yani bu genişlemenin Galois grubu $G=(\sigma)$ sonlu bir devresel grup olsun). Bu durumda $y \in L$ elemanının normunun 1 olması için gerek ve yeter şart, $y = x^{-1}\sigma(x)$ bağıntısını gerçekleyen bir $x \in L$ elemanının var olmasıdır.

Ispat : L cisminin sıfırdan farklı elemanlarının çarpma altında oluşturdukları grup M ise, Teorem 2.4. ve 2.5.'e göre

$$0 = H^1(G, M) \cong \text{Ker}N/D(M)$$

ve dolayısıyla $\text{Ker}N = D(M)$ elde edilir. $\text{Ker}N$, L içinde normu 1'e eşit olan elemanlar cümlesi, ve çarpma operasyonu altında ifade edilirse

$$D(M) = \{y \in L \mid y = x^{-1}\sigma(x), x \in M\}$$

olduğuna göre, normu 1 olan elemanların hepsi $D(M)$ cürlesinin içindedir. Bu da Hilbert'in 90. Teoremini ispatlar.

Gruplar teorisi açısından ilginç olan birinci derece kohomoloji hesapları şöyle özetlenebilir: G , q elemanlı sonlu bir K cismi üzerinde tanımlanan belirli bir Lie cebirine bağlı bir Lie tipi grup, V ile sözü edilen Lie cebirinin kök sistemine bağlı herhangi bir indirgenemiyen G -modül olsun. Bu durumda $H^1(G, V)$ grubunun, K üzerinde bir vektör uzayı olduğu aşikârdır. Bu vektör uzayının boyutunun ne olacağı ise hemen hemen bütün sözü edilen durumlar için hesaplanmıştır ve sonuç, genellikle $H^1(G, V)$ 'nin triviyal olduğudur. Ancak bazı özel hallerde $H^1(G, V)$ 'nin K üzerindeki boyutunun 1 veya daha fazla olduğu görülmektedir. Bu özel haller, G grubunun mertebesinin veya q sayısının ufak olduğu hallerdir (örneğin $q=2$ veya 3). Bu hallerin özel lineer gruplarla ilgili olan birinden ileride söz edilecektir. Bu tür kohomoloji grup-

larının hesaplanması ile ilgilenen araştırmacılar arasında McLaughlin [16], Cline, Parshall ve Scott [6], Sah [17, 18], Jones [11], Avrunin [1, 2], Bell [3, 4, 5], Küsefoğlu [12] ve diğerleri sayılabilir. Araştırma yöntemlerinde ise belli başlı iki yol görülmektedir. Bunların biri, bu bölümde verilmiş olan teoremler esas alınarak derivasyon grupları ile çalışmak, ötekisi ise Lie tipi grupların kök sistemlerinden doğan belirli kongrüansları incelemektir. İki yolda da amaç, kohomolojinin trivial olması için yeter şartlar ortaya koymaktır. Bu tür yeterlilik şartları bulunamadığı taktirde cevabın ne olduğunu bulmak ise daha güç bir problem olmaktadır. Bu hallerde en yararlı yöntem, G grubu yerine G 'nin bir p -Sylow altgrubuna bakmaktır (p , tabii ki K cisminin karakteristiği olmaktadır). Eğer P , G 'nin bir p -Sylow altgrubu ise, $H^1(G, V)$, $H^1(P, V)$ 'nin bir altgrubuna izomorfik olmaktadır [3, s. 219; 12, s. 13]. Bu altgrup da, *konumlu derivasyonlar altgrubu* denilen ve teoride hesaplanması mümkün olan bir altgruptur. Kısacası, $H^1(G, V)$ grubunun doğrudan doğruya hesaplanamadığı hallerde yapılacak iş, G 'nin bir p -Sylow grubu üzerindeki bu konumlu derivasyonları bulmaktır.

Kohomoloji gruplarının hesaplanmasına örnek olarak üçüncü bölümde yararlı olacak birkaç bilinen uygulama özetlenecektir [16]:

Teorem 2.6. G herhangi bir grup, V de bir G -modül olsun. Eğer, G 'nin merkezinde bulunan bir z elemanı için, $1-z$ elemanı V üzerinde bir otomorfi oluyorsa, o zaman $H^1(G, V) = 0$ sonucu geçerlidir.

İspat : $f \in \text{Der}(G, V)$, z de yukarıdaki özellikleri haiz bir eleman ise, her $x \in G$ için,

$$f(xz) = f(zx)$$

olmalıdır. Bu bağıntıya (2.4) uygulanarak

$$(z-1)f(x) = (x-1)f(z)$$

türetilir. $z-1$ bir otomorfi olduğuna göre de

$$f(x) = (x-1)\{(z-1)^{-1}f(z)\},$$

yani f 'nin bir iç derivasyon olması gerektiği görülür. Bu da Teorem 2.2.'ye göre $H^1(G, V) = 0$ demektir.

Bu teoremin bir uygulaması da şudur:

Sonuç 2.4. K , karakteristiği 2'den farklı herhangi bir sonlu cisim; $G = \text{SL}_2(K)$ özel lineer grubu, $V = K^2$ de, G 'deki matrislerin uygulandığı 2 boyutlu vektör uzayı olsun. O zaman,

$$H^1(G, V) = 0$$

sonucu geçerlidir.

İspat : I , birim matris ise, $-I$ elemanı, $\text{SL}_2(K)$ grubunun merkezindedir

ve K_2 'nin karakteristiği 2'den farklı olduğuna göre $-I-I = -2I$ elemanı da bir otomorfi olur. Şimdi sonuç, Teorem 2.6.'dan elde edilebilir.

2.2. İKİNCİ DERECE KOHOMOLOJİ GRUPLARI

Bu bölümde son olarak ikinci derece kohomoloji gruplarına kısaca değinilecek ve bu konunun gruplar teorisine yapılan uygulamaları verilecek, bilinen bazı sonuçlar ve bazı açık sorulardan söz edilecektir. Eğer V , \tilde{G} grubunun komütatif ve normal bir alt grubu ise, $G = \tilde{G}/V$ ve $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ doğal epimorfi olarak alındığında

$$0 \rightarrow V \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1 \quad \dots (2.16)$$

dizisinin tam olduğu görülür. Tabii ki burada, \tilde{G} içinde V 'nin, G 'ye izomorf olan bir tamamlayıcısının bulunabilmesi koşulunun sağlanması gerekli veya mümkün olmayabilir. Yine de (2.16) tam dizisinde bir *normalize edilmiş kesit*, yani $\pi \circ \sigma = \text{id}_G$ ve $\sigma(1)=1$ bağıntılarını gerçekleyen bir $\sigma: G \rightarrow \tilde{G}$ tasviri vardır. Verilen bir tam dizi için birçok normalize edilmiş kesit var olabilir; ancak, bunlardan birinin G grubundan \tilde{G} 'ya bir homomorfi olabilmesi için yeter şart, (2.16) tam dizisinin bölünmesi, başka bir deyişle, V 'nin \tilde{G} içinde G 'ye izomorf bir tamamlayıcısının bulunması, veya \tilde{G} 'nin V ile G 'nin semidirekt bir çarpımı olmasıdır. Aksi halde bir normalize edilmiş kesitin, bir grup homomorfisi olması beklenemez.

(2.16) dizisi için belirli bir kesit, diyelim σ , seçildikten sonra

$$x \circ v = \sigma(x)v \sigma(x)^{-1} \quad x \in G, v \in V \quad \dots (2.17)$$

bağıntısı yoluyla V , bir G -modülüne haline gelir. Zira, V 'nin komütatif olması dolayısıyla bu tanım, seçilmiş olan σ kesidinden bağımsız olacaktır. Şimdi $\pi \circ \sigma = \text{id}_G$ koşulu yüzünden $x, y \in G$ için

$$\sigma(x)\sigma(y)\sigma(xy)^{-1} \in V$$

olacağından,

$$\sigma(x)\sigma(y) = f(x,y)\sigma(xy) \quad \dots (2.18)$$

bağıntısıyla bir $f: G \times G \rightarrow V$ tasviri tanımlanabilir. $x, y, z \in G$ için (2.18)'e göre

$$(\sigma(x)\sigma(y))(\sigma(z)) = f(x,y) f(xy,z)\sigma(xyz)$$

olacak, ve, bu da asosiyatiflik ve (2.17) yüzünden

$$\begin{aligned} \sigma(x)(\sigma(y)\sigma(z)) &= \sigma(x) f(y,z)\sigma(yz) \\ &= \sigma(x)f(y,z)\sigma(x)^{-1} \sigma(x)\sigma(yz) \\ &= x \circ f(y,z) f(x,yz)\sigma(xyz) \end{aligned}$$

elemanına eşit olacağı için, V 'deki operasyon toplama olduğuna göre her $x, y, z \in G$ için

$$f(x,y)+f(xy,z) = x \circ f(y,z)+f(x,yz) \quad \dots (2.19)$$

bağıntısı gerçekleşecektir. Böyle bir bağıntıyı gerçekle-
yen bütün $f:G \times G \rightarrow V$ tasvirleri, $Z^2(G,V)$ ile gösterilen bir
komütatif grup oluştururlar. Ayrıca G herhangi bir grup,
 V 'de bir G -modül ise, (2.16) tam dizisini veren bir \tilde{G}
grubu olacaktır.

Sorun, (2.19)'u gerçekleyen f tasvirinin, başta
seçilmiş olan σ kesidine bağımlı olmasıdır. Eğer (2.16)
tam dizisinde σ yerine ρ kesidi seçilirse, her $x \in G$ için
 $\sigma(x)$ ve $\rho(x)$ elemanlarının farkının V 'nin içine düşmesi
gerekecek, yani her $x \in G$ için

$$\rho(x) = a(x)\sigma(x) \quad \dots (2.20)$$

bağıntısını gerçekleyen bir $a(x) \in V$ bulunacaktır. Eğer
 ρ kesidinin belirlediği $Z^2(G,V)$ grubunun elemanına g
denirse, yani

$$\rho(x)\rho(y) = g(x,y)\rho(xy)$$

ise, (2.20) ve (2.17)'ye göre

$$\begin{aligned} g(x,y)a(xy)\sigma(xy) &= a(x)\sigma(x)a(y)\sigma(y) \\ &= a(x)x \circ a(y)f(x,y)\sigma(xy) \end{aligned}$$

bulunur. Yine V 'deki operasyon toplama olarak alındığından, buradan

$$f(x,y)-g(x,y) = a(xy)-x \circ a(y)-a(x)$$

ifadesi elde edilir. Eğer $a: G \rightarrow V$ herhangi bir tasvir ise, bundan $x, y \in G$ için

$$f_a(x,y) = a(xy)-x \circ a(y)-a(x) \quad \dots (2.21)$$

yoluyla bir $f_a: G \times G \rightarrow V$ tasviri türetilebilir. Üstelik, (2.21) bağıntısını gerçekleyen bütün tasvirler cümlesi, $Z^2(G, V)$ grubunun, $B^2(G, V)$ adı verilen bir altgrubunu oluştururlar. Özetlenecek olursa, (2.16) bağıntısı için seçilen iki kesidin $Z^2(G, V)$ grubundaki resimlerinin farkı, $B^2(G, V)$ altgrubuna düşmektedir. Böylece (2.16) tam dizisini veren her \tilde{G} grubu, $Z^2(G, V)/B^2(G, V)$ grubunun bir elemanını belirlemektedir. G 'nin, katsayıları V 'de olan ikinci dereceden kohomoloji grubu da

$$H^2(G, V) = Z^2(G, V)/B^2(G, V) \quad \dots (2.22)$$

olarak tanımlanır.

G bir grup, V de bir G -modül olsun ve

$$0 \rightarrow V \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1 \quad \text{ile}$$

$$0 \rightarrow V \rightarrow \bar{G} \xrightarrow{\pi'} G \rightarrow 1$$

tam dizileri verilmiş olsun. Eğer, aşağıda verilen diyagramı komütatif yapan bir $\theta: \tilde{G} \rightarrow \bar{G}$ homomorfisi varsa, bu iki diziye *denk* denilecektir:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{\pi} & G \rightarrow 1 \\ & & & & \downarrow \text{id}_V & \downarrow \theta & \downarrow \text{id}_G \\ 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & \bar{G} & \xrightarrow{\pi} & G \rightarrow 1 \end{array}$$

Bahsedilen olayın, (2.16) tipi tam diziler arasında bir denklik bağıntısı verdiği aşikârdır. Üstelik, denk olan iki tam dizinin orta terimlerinin (yani \tilde{G} ve \bar{G} 'nin) izomorfik gruplar olacağı da açıktır, fakat bu koşul, iki dizinin denk olması için yeterli değildir. Eğer $\sigma: G \rightarrow \bar{G}$, bir normalize edilmiş kesit ise, o takdirde $\rho = \theta \circ \sigma: G \rightarrow \bar{G}$ da ikinci dizi için bir kesit olacaktır. $x, y \in G$ için

$$\rho(x)\rho(y) = g(x,y)\rho(xy)$$

ise, θ tasviri V üzerinde id_V olacağından

$$\theta\sigma(x)\theta\sigma(y) = g(x,y)\theta\sigma(xy) \quad \dots (2.23)$$

bağıntısı elde edilir. θ bir homomorfi olduğuna göre (2.23)'ten de $x, y \in G$ için

$$\sigma(x)\sigma(y) = g(x,y)\sigma(xy)$$

bulunur. Yani, denk olan tam diziler, $Z^2(G,V)$ grubunda aynı elemana tekabül ederler.

Karşıt olarak, eğer $f \in Z^2(G,V)$ verilmişse, \tilde{G} , V ile G 'nin Kartezyen çarpımı olarak alınıp $v, w \in V, x, y \in G$ için

$$(v,x)(w,y) = (v+xow+f(x,y), xy) \quad \dots (2.24)$$

bağıntısı yoluyla bir grup haline getirilir. Üstelik, $\pi: \tilde{G} \rightarrow G, \pi(v,x)=x$ ve $i: V \rightarrow \tilde{G}$ da $i(v)=(v,1)$ ise,

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

dizisi tamdır, ve $f \in Z^2(G,V)$ 'ye tekabül eder. Buradan aşağıdaki teorem elde edilmektedir [9, s. 71] :

Teorem 2.7. G herhangi bir grup, V de bir G -modülü olsun. Bu durumda

$$0 \rightarrow V \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

tipi tam dizilerin denklik sınıfları ile $H^2(G,V)$ grubunun elemanları arasında birebir bir tekabül vardır. Bu tekabül altında V ile G 'nin semidirekt çarpımının denklik sınıfı, $H^2(G,V)$ grubunun birim elemanına tekabül eder.

Özetlenecek olursa, $H^2(G,V)$ grubunun triviyal olması, (2.16) tipi her tam dizinin bölünmesi gerektiği,

dolayısıyla \tilde{G} 'nin V ile G 'nin semidirekt çarpımına izomorfik olacağı sonucunu doğurmaktadır. Örneğin, eğer G bir serbest grup ise, her G -modülü için durum böyledir. İlginç olan husus, $H^2(G, V)$ 'nin triviyal olmadığı hallerde elde edilen \tilde{G} gruplarının yapısıdır. Böyle grupların varlığı veya yokluğu, sonlu basit gruplar üzerinde yapılan araştırmalarda bir soru olarak belirlemektedir. Bir örnek olarak, $G = B_4(3)$ Chevalley grubu (yani 3 elemanlı cismin üzerindeki 8 boyutlu V vektör uzayındaki bir çeşit kuvadratik formun ortogonal grubu) ise, $H^2(G, V)$ kohomoloji grubunun triviyal olmadığı, Gries ve Fischer'in bu yıl basında $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$ (yaklaşık olarak 8.08×10^{53}) mertebeli bir basit grup olan F_1 (diğer adıyla "canavar") grubunu inşa etmeleri üzerine kesinlik kazanmış bulunmaktadır. Sözü edilen kohomoloji grubunun hesaplanmasında çeşitli güçlükler olduğu, daha önceden bilinmekteydi [12].

Birinci kohomoloji gruplarıyla ilgili bölüme paralel olarak, burada da önce bir basit uygulama yapılacak ve sonra bilinen sonuçlara kısaca değinilecektir.

$G = \langle x \rangle$ bir devresel grup, V de herhangi bir G -modülü olsun. Eğer,

$$0 \rightarrow V \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

tam dizisi verilmişse, $\pi(u) = x$ olan herhangi bir $u \in \tilde{G}$ seçilsin. Bu durumda $\sigma: G \rightarrow \tilde{G}$,

$$\sigma(x^k) = u^k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \dots (2.25)$$

olarak tanımlanırsa, σ normalize edilmiş bir kesit olacaktır. Eğer G sonsuz bir grup ise, (2.25) ile tanımlanan σ tasvirinin bir homomorfi olması gerekeceğinden $H^2(G, V) = 0$ elde edilir. Halbuki G , mertebesi n olan sonlu bir gruptur,

$$(\pi u)^n = \pi(u^n) = x^n = 1$$

olacağından, $u^n \in V$ 'nin içine düşer. Ayrıca her $x \in G$ için

$$\sigma(x^k) u^n \sigma(x^k)^{-1} = u^k u^n u^{-k} = u^n \in V \quad \dots (2.26)$$

olmaktadır. Eğer V^G , V modülündeki G -invariant elemanlar cümlesini gösteriyorsa, (2.26)'dan $v = u^n \in V^G$ sonucu elde edilir. Yani her normalize edilmiş kesit, V^G cümlesinin bir elemanına tekabül etmektedir. Yukarıda seçilen u yerine, aynı koşulu sağlayan bir başka eleman seçilseydi, o elemanın bir $w \in V$ için wu 'ya eşit olması gerekecek ve ayrıca

$$\begin{aligned} (wu)^n &= (wu)(wu) \dots (wu) \\ &= w(uwu^{-1})(u^2wu^{-2}) \dots (u^{n-1}wu^{-(n-1)}) \end{aligned}$$

bağıntısından

$$(wu)^n = (1+x+x^2+\dots+x^{n-1})w + v$$

olduğu görülecektir. Eğer

$$N = 1+x+\dots+x^{n-1} \in \mathbb{Z}G$$

G grubunun normu ise, iki ayrı kesidin farkının Nw , $w \in V$ olması gerektiği, yani norm tasvirinin resmi olan NV cümlesinin içine düşmesi gerektiği aşikârdır. Böylece, devresel grupların ikinci devre kohomolojisi için aşağıdaki teorem ispatlanmış olmaktadır [9, s. 391]:

Teorem 2.8.

G devresel bir grup, V de herhangi bir G -modül olsun. O zaman

- i) G sonsuz bir grup ise $H^2(G, V) = 0$,
- ii) G sonlu bir grup ise,

$$H^2(G, V) \cong V^G / NV$$

olur.

Sonuç 2.5.

$G = \langle x \rangle$, mertebesi n olan sonlu devresel bir grup, V de bir G -modül olsun. Eğer V , triviyal bir G -modül ise, o halde

$$H^2(G, V) \cong V^G / NV$$

izomorfisi gerçekleşir. Üstelik, eğer $nV = V$ ise, o takdirde $H^2(G, V) = 0$ olur.

İspat :

Bu durumda her $v \in V$ için

$$NV = (1+x+x^2+\dots+x^{n-1})v = nv$$

olacağı için $NV = nV$ elde edilir. Şimdi sonuç aşikârdır.

Bu sonucun bir uygulaması, yine cisim genişlemeleri üzerinedir. Bir L cismi için $(L, +)$ o cismin elemanlarının toplama altında oluşturdukları grup, L^* da L 'nin sıfırdan farklı elemanlarının çarpma altında oluşturdukları grubu gösterebilir.

Sonuç 2.6. $G, K \subseteq L$ cisim genişlemesinin Galois grubu olsun. Eğer bu genişleme normal, ve G de sonlu devresel bir grup ise, o zaman

$$i) \quad H^2(G, (L, +)) = 0 \quad \text{ve}$$

$$ii) \quad H^2(G, L^*) \cong K^*/NL^*$$

sonuçları geçerlidir.

İspat :

i) Verilen cismin genişlemesinin normal olması,

$$(L, +)^G = (K, +)$$

demektir. Dolayısıyla eğer $G = \langle x \rangle$ ve G 'nin mertebesi n ise, her $a \in L$ için

$$Na = (1+x+\dots+x^{n-1})a$$

elemanı, K cisminin içine düşecek ve karşıt olarak da K cisminin her elemanı Na , $a \in L$ olarak ifade edilebilecektir. Kısacası $NV = (K, +)$ 'dir. Bu durumda Teorem 2.8. uygulanarak istenilen sonuç elde edilir.

ii) Genişlemenin normal olması, $(L^*)^G = K^*$ sonucunu verir. Yine Teorem 2.8. uygulanarak bu kısım da ispatlanmış olur.

Birkaç örnekleme yapılacak olursa, $L = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ ise, $G = \langle x \rangle$ grubunun mertebesi 2 olur, ve $x..$

$$x(a+bi) = a-bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

olarak tanımlanır. Yani eğer $z = a+bi \in \mathbb{C}$ ise,

$$Nz = z\bar{z} = a^2 + b^2,$$

bağıntısı dolayısıyla $N\mathbb{C}^*$ grubunun, pozitif reel sayıların çarpma altında oluşturdukları gruba izomorfik olduğu görülür. Bu durumda $\mathbb{R}^*/N\mathbb{C}^*$ grubunun mertebesi 2 olur, yahut farklı bir deyişle

$$H^2(G, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}_2$$

izomorfisi bulunur. Öte yandan, $L = \mathbb{Q}(i)$, $K = \mathbb{Q}$ ise, $H^2(G, L^*)$ grubu, \mathbb{Z}_2 cismi üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayıdır.

Bu arada, G bir grup, V de bir G -modülü ise, çeşitli derecelerden $H^n(G, V)$ kohomoloji grupları arasındaki bazı kanonik tam dizilerin varlığı yüzünden belirli ilişkiler bulunduğu [9, s. 18; 7, s. 189] kaydedilmelidir. Dolayısıyla, $H^n(G, V)$ biliniyorsa, $H^{n+k}(G, V)$, $k \geq 1$ gruplarının ne olduklarını bulmak için sözü geçen kanonik tam diziler yoluyla indüksiyon yapmak, geçerli bir metottür. Başka bir husus ise, $H^n(G, V)$, $n=1,2$ gruplarının,

G 'nin belirli normal altgrupları ve G 'nin bu altgruplara bölüm grupları cinsinden, yine belirli tam diziler yardımı ile ifade edilebileceğidir [3, s. 219; 4, s. 240; 9, s. 88]. Birinci derece kohomoloji gruplarında olduğu gibi, eğer G , karakteristiği p olan sonlu bir cisim üzerinde kurulmuş bir Chevalley grubu, P de G 'nin bir p -Sylow alt grubu ise, $H^2(G, V)$ de, $H^2(P, V)$ 'nin bir alt grubuna izomorfik olacaktır. Dolayısıyla, p -Sylow gruplarının kohomolojisinin belirlenmesi, problemin çözülmesi için ilk adımdır. Küsefoğlu [12], sonlu ortogonal gruplar üzerindeki ikinci derece kohomoloji gruplarını araştırırken bu yolu izlemiştir.

Yine G , q elemanlı bir sonlu cisim üzerinde tanımlanan Lie tipi bir grup (lineer gruplar, ortogonal gruplar, simplektik gruplar, Suzuki grupları, v.s. gibi), ve V de G 'nin indirgenemeyen modüllerinden biri ise, $H^2(G, V)$ kohomoloji grupları çoğunlukla bilinmektedir. Bu konuda çalışan araştırmacılar arasında McLaughlin [16], Griess [8], Bell [3, 4, 5], Landazuri [14], Avrunin [1, 2], Küsefoğlu [12, 13], Sah [17, 18] ve diğerleri sayılabilir. Sonuçlar, ikinci dereceden kohomoloji gruplarının da belirli özel haller dışında triviyal olduklarını göstermektedir. İlginç özel hallerden biri, McLaughlin'in bir teoremine göre $K = GF(2^s)$, $s \geq 3$ ise, $H^2(SL_2(K), K^2)$ grubunun K cismi üzerindeki boyutunun 1 olduğudur. Bir sonlu cisim üzerinde kurulmuş olan özel lineer grupların çeşitli modülleri üzerindeki kohomoloji grupları hakkında bilinen sonuçlar, [3., Tablo 1]'de özetlenmiştir. Suzuki gruplarının da standart (4 boyutlu) modülleri üzerinde triviyal olmayan kohomoloji verdikleri görülmektedir [5, Teorem 2.3.].

III

GL_n(R) GRUBUNUN BAZI ALTGRUPLARININ, STANDART MODÜLLERİ ÜZERİNDEKİ KOHOMOLOJİ GRUPLARI

Bu bölümde ele alınacak olan konu, belirli matris gruplarının, onların standart modülleri üzerindeki birinci derece kohomolojilerinin hesaplanmasıdır. İkinci bölümde özetlenen sonuçlardan farklı olarak, burada herhangi bir halka üzerindeki matris grupları ele alınacak, yani matris gruplarının cisimler üzerinde kurulu olması şartı kaldırılacaktır. Elde edilen sonuçlar, birinci derece kohomolojinin birçok halka için yine triviyal olduğunu göstermektedir.

R, birim elemanına sahip herhangi bir halka olsun* (R komütatif dahi olmayabilir). R üzerindeki bütün $n \times n$ nonsingüler matrislerin oluşturduğu genel lineer grup $GL_n(R)$ ile gösterilsin. Eğer I, $n \times n$ birim matris ve E_{ij} , i'inci satırı ve j'inci sütununun çakıştığı yerde 1, diğer bütün yerlerde de 0 olan $n \times n$ bir matris ise,

$$x_{ij}(t) = I + tE_{ij}, \quad i \neq j, \quad t \in R \quad \dots (3.1)$$

bağıntısıyla tanımlanan $x_{ij}(t)$ matrisine *elemanter* bir matris denir. Elemanter matrislerin herbiri $GL_n(R)$ grubunun

* Bu araştırmadaki her halkanın bir birim elemanına sahip olduğu ve bu birim elemanın halkadaki sıfırdan farklı olduğu varsayılacaktır.

bir elemanı olduğu için, bu matrislerin doğurduğu $E_n(R)$ grubu, genel lineer grubun bir altgrubu olur. Üstelik, eğer R halkası komütatif ise, o takdirde determinant kavramı anlam kazanacağından $E_n(R)$, determinantı 1 olan $n \times n$ matrislerin oluşturduğu $SL_n(R)$ özel lineer grubun içine düşer. Teorem 3.1.'de, R herhangi bir cisim veya bir Öklid halkası olduğu zaman, $E_n(R)$ altgrubunun, $SL_n(R)$ 'nin tümüne eşit olacağı ispatlanmaktadır. Dolayısıyla, bu durumda $E_n(R)$ için ispatlanan her sonuç, $SL_n(R)$ için de geçerli olmaktadır. Eğer R halkası üzerindeki $n \times 1$ sütun matrislerinden oluşan $GL_n(R)$ -modülü, R^D ile gösterilirse, R^D aynı zamanda $E_n(R)$ için de bir modüldür. Bu R^D modülüne, $GL_n(R)$ grubunun *standart modülü* denir. Bu bölümde $H^1(E_n(R), R^D)$ kohomoloji grupları oldukça genel bir biçimde incelenecektir. Kohomoloji gruplarının hesabına geçmeden önce $SL_n(R)$ ve $E_n(R)$ grupları arasındaki ilişkiyi belirleyen bir teorem ispatlanacaktır.

Teorem 3.1. Eğer R bir cisim veya bir Öklid halkası ise, o zaman her $n \geq 1$ için $E_n(R)$ ve $SL_n(R)$ grupları eşittir.

İspat : R bir Öklid halkası olduğunda teoremin ispatı [15]'de bulunabilir. Burada teorem, R 'nin bir cisim olduğu durumda ispatlanacaktır.

R herhangi bir komütatif halka ve $M \in SL_n(R)$ ise, M matrisi sağdan (veya soldan) belirli elemanter matrislerle çarpılarak M 'nin sütunları (veya satırları) üzerinde çeşitli işlemler yapılabilir. Örneğin, M 'yi sağdan (3.1) bağıntısında tanımlanan $x_{ij}(t)$ ile çarpmak, M 'nin i 'inci sütununu t ile çarpıp j 'inci sütununa eklemek demektir. Aynı şekilde M 'yi soldan $x_{ij}(t)$ ile çarpmak, bu işlemi

M 'nin satırları üzerinde yapmak olur. Eğer, sonlu sayıda bu türden elemanter matris operasyonları sonunda M matrisi, M' matrisine dönüşüyorsa, yani $A_1, A_2, \dots, A_S, B_1, B_2, \dots, B_K \in E_n(R)$ için

$$B_1 B_2 \cdots B_K M A_1 A_2 \cdots A_S = M'$$

oluyorsa, o zaman M' matrisinin $E_n(R)$ altgrubunda olması, M 'nin de aynı altgrubun içine düşmesini gerektirir. O halde, R herhangi bir cisim ve $M \in SL_n(R)$ ise, M 'nin $E_n(R)$ altgrubunda olduğunu göstermek için M matrisini yukarıda bahsedilen yolla idantik matrise dönüştürmek, $E_n(R) = SL_n(R)$ sonucunu ispatlamaya yeterlidir. Bu ispat, n üzerinde indüksiyonla yapılacaktır. $n=1$ için durum açıktır. Şimdi $n>1$ olduğu varsayılacak ve teoremin her $k < n$ için geçerli olduğu kabul edilecektir.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, m_{ij} \in R, 1 \leq i, j \leq n$$

olarak ifade edilirse, o zaman eğer $m_{11} = 1$ ise, M 'nin 1'inci satırının belirli katlarını diğer satırlara, ve sonra 1'inci sütunun belirli katlarını diğer sütunlara eklemek yoluyla M ,

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

matrisine dönüşür. Üstelik bu işlemler, determinantı koruduğundan $\det M_1 = \det M = 1$ 'dir. İndüksiyon hipotezine göre $M_1 \in SL_{n-1}(R) = E_{n-1}(R)$ olduğundan, $M \in SL_n(R)$ sonucu elde edilir.

Eğer $m_{1j} \neq 1$ ise, o zaman iki hal ortaya çıkmaktadır. Bunların ilki, bir $2 \leq j \leq n$ için $m_{1j} \neq 0$ olması durumudur. R bir cisim olduğu için

$$1 - m_{11} = m_{1j}x \quad \dots (3.2)$$

denklemini çözen bir $x \in R$ bulunabilir. Şimdi, M 'nin j 'inci sütunu (3.2) bağıntısında verilen x elemanı ile çarpılarak 1'inci sütuna eklenirse, M matrisinin sol üst köşesi yine 1'e dönüşür. Bu hal için yukarıda ispat verilmiştir.

Geri kalan hal, $m_{11} \neq 1$ ve her $2 \leq j \leq n$ için $m_{1j} = 0$ durumudur. Bu halde, M nonsingüler bir matris olduğu için, M 'nin ikinci sütununda sıfırdan farklı bir eleman bulunmalıdır. Yani öyle bir i vardır ki, $2 \leq i \leq n$ ve $m_{i2} \neq 0$ olmalıdır. O zaman, i 'inci satır, 1'inci satıra eklenerek M ,

$$\begin{bmatrix} m_{11} + m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{in} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{in} \end{bmatrix}$$

matrisine dönüştürülebilir. Eğer $m_{11} + m_{i1} = 1$ ise mesele yoktur. $m_{11} + m_i \neq 1$ olsa bile, $m_{i2} \neq 0$ olduğundan, yukarıdaki hal için verilen ispat geçerli olacaktır. Kısacası, $E_n(R)$, $SL_n(R)$ 'ye eşittir.

Şimdi, ileride yapılacak olan kohomoloji hesaplarında kullanılacak olan bazı matris cebiri sonuçları, bir lemma halinde verilecektir.

Lemma 3.1. Herhangi bir halka üzerindeki genel lineer gruptaki elemanter matrisler, aşağıdaki bağıntıları gerçekleştirirler:

$$i) \quad x_{ij}(t)x_{kl}(s) = x_{kl}(s)x_{ij}(t) \quad s, t \in R, \\ j \neq k, i \neq l \quad \dots(3.3)$$

$$ii) \quad x_{ij}(t)x_{jk}(s)x_{ij}(-t)x_{jk}(-s) = x_{ik}(ts), \\ s, t \in R, i \neq j, j \neq k, k \neq i. \quad \dots(3.4)$$

Ispat : Basit bir matris hesabı sonunda bu bağıntıların gerçekliği ortaya çıkar. Esasında bu bağıntılar, R , bir cisim olduğunda, Lie tipi gruplar için geçerli olan Steinberg komütasyon bağıntılarından [19, s. 66 ve 72] başka bir şey değildirler.

Bu bölümdeki en genel teorem şimdi ispatlanabilir:

Teorem 3.2. R herhangi bir halka ve $n \geq 4$ ise, $H^1(E_n(R), R^n) = 0$ sonucu geçerlidir.

Ispat : İkinci bölümdeki sonuçlara göre (Teorem 2.2.), $E_n(R)$ 'den R^n 'e her derivasyonun bir iç deri-

vasyon olduğunu göstermek yeterlidir. $f \in \text{Der}(E_{11}(R), R^n)$ alınıp, (3.3) bağıntısının iki yanına uygulanırsa, (2.4)'e göre $j \neq k, i \neq l$ için

$$x_{ij}(t)f(x_{kl}(s)) + f(x_{ij}(t)) = x_{kl}(s)f(x_{ij}(t)) + f(x_{kl}(s))$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$(1 - x_{kl}(s))f(x_{ij}(t)) = (1 - x_{ij}(t))f(x_{kl}(s)),$$

ve buradan da (3.1) bağıntısı kullanılarak

$$s E_{kl} f(x_{ij}(t)) = t E_{ij} f(x_{kl}(s)) \dots (3.5)$$

bulunur. (3.5) bağıntısının sol tarafında, k 'inci satır dışındaki her koordinat sıfıra eşit olacak, ancak k 'inci satırda

$$s(f(x_{ij}(t)))'nin \ell'inci koordinatı) \dots (3.6)$$

gözükecektir. Aynı şekilde, (3.5)'in sağ tarafında i 'inci satır dışındaki her koordinat sıfır olacak, i 'inci satırda da

$$t(f(x_{kl}(s)))'nin j'inci koordinatı) \dots (3.7)$$

bulunacaktır. Halbuki $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ verildiğinde, $n \geq 4$ olduğu için, önce $1 \leq l \leq n$, $l \neq i, j$ alınabilir ve sonra da $1 \leq k \leq n$, $k \neq i, j, l$ seçilebilir. Bu durumda $k \neq i$ olduğu için (3.6) ve (3.7)'den elde edilen sonuç, her $t \in R$ ve her $l \neq i$ için,

$$f(x_{ij}(t))\text{'nin } l\text{'inci koordinatı} = 0$$

olduğudur.

Şimdi her $i \neq j$, her $t \in R$ için, $f(x_{ij}(t))\text{'nin } i\text{'inci satırı dışındaki her koordinatının sıfır olduğu kabul edilsin}$ ($n \geq 4$ ise bunun sağlandığı yukarıda gösterilmiştir). Önce $f \in \text{Der}(E_n(R), R^D)$ ve $A, B, C, D \in E_n(R)$ ise, derivasyon kuralı (2.4)'ü birkaç kez uygulayarak

$$\begin{aligned} f(ABCD) &= f(A) + Af(BCD) \\ &= f(A) + Af(B) + ABf(CD) \\ &= f(A) + Af(B) + ABf(C) + ABCf(D) \quad \dots (3.8) \end{aligned}$$

bulunacağı aşikârdır. $f \in \text{Der}(E_n(R), R^D)$, (3.8) kuralına uyularak (3.4) bağıntısında verilen komütatöre uygulanacak olursa \therefore , $t \in R$, $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$ için

$$\begin{aligned} f(x_{ik}(ts)) &= f(x_{ij}(t)) + x_{ij}(t)f(x_{jk}(s)) \\ &\quad + x_{ij}(t)x_{jk}(s)f(x_{ij}(-t)) \\ &\quad + x_{ij}(t)x_{jk}(s)x_{ij}(-t)f(x_{jk}(-s)) \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
f(x_{ik}(ts)) &= f(x_{ij}(t)+x_{ij}(t))f(x_{jk}(s)) \\
&+ x_{ij}(t)x_{jk}(s)f(x_{ij}(-t)) \\
&+ x_{ik}(ts)x_{jk}(s)f(x_{jk}(-s)) \quad \dots (3.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. $f(x_{ij}(-t))$ 'nin, yalnızca i 'inci koordinatı sıfırdan farklı olabileceği için, her ℓ ve her $k \neq i$ için

$$x_{\ell k}(s)f(x_{ij}(-t)) = f(x_{ij}(-t)) \quad \dots (3.10)$$

olmalıdır. (3.10) denklemini (3.9)'a yerleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
f(x_{ik}(ts)) &= f(x_{ij}(t)+x_{ij}(t))f(x_{jk}(s)) \\
&+ f(x_{ij}(-t)+f(x_{jk}(-s))) \quad \dots (3.11)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Öte yandan $x_{ij}(-t) = (x_{ij}(t))^{-1}$ olduğundan, (2.5) ve (3.10)'a göre

$$f(x_{ij}(-t)) = x_{ij}(-t)f(x_{ij}(t)) = -f(x_{ij}(t)) \quad \dots (3.12)$$

bulunur. Şimdi (3.11) ve (3.12)'den

$$\begin{aligned}
f(x_{ik}(ts)) &= (x_{ij}(t) - I)f(x_{jk}(s)) \\
&= tE_{ij}f(x_{jk}(s))
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$(x_{ij}(t)-I)v = t E_{ij}v = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t\xi_j \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = f(x_{ij}(t))$$

elde edilir. Yani $f, E_n(\mathbb{R})$ grubunu doğuran her $x_{ij}(t)$ elemanı üzerinde, yukarıda tanımlanan $v \in \mathbb{R}^n$ ile belirlenen bir iç derivasyon olmaktadır. Derivasyon kuralı (2.4)'ün sonlu sayıda elemanın çarpımına genellenebileceği düşünülürse, bundan f 'nin, $x_{ij}(t)$ elemanlarının sonlu çarpımları, yani tüm $E_n(\mathbb{R})$ grubu üzerinde bir iç derivasyon olması gerektiği ortaya çıkar. Bu da, $n \geq 4$ için $H^1(E_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n) = 0$ demektir.

Yukarıdaki ispatta kullanılan yöntem, $n=3$ için geçerli olmamakla birlikte, ondan hareket edilerek, oldukça genel bir halkalar kümesi için $H^1(E_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3) = 0$ olduğunu ispatlamak mümkündür. Bunun için, yukarıda gözlemlenmiş olan bir husus, ayrı bir sonuç halinde ifade edilecektir:

Sonuç 3.1. R herhangi bir halka, $f \in \text{Der}(E_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $n \geq 3$ ise ve her $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, ve her $t \in R$ için, $f(x_{ij}(t))$ 'nin i 'inci satırı dışındaki her koordinat sıfıra eşitse, o halde f , bir iç derivasyondur.

İspat: Teorem 3.2.'nin ispatının içindedir.

$n=3$ durumunu ele almadan önce matris grupları hakkında bazı sonuçlara ihtiyaç vardır.

Teorem 3.3. R herhangi bir komütatif halka ise, her $n \geq 1$ için, $E_n(\mathbb{R})$ grubu, $SL_n(\mathbb{R})$ grubunun diagonal matrislerden oluşan alt grubunu içerir.

Ispat: Teoremin ispatı, n üzerine indüksiyon ile olacaktır. $n=1$ için sonuç aşikârdır; bundan sonra $n \geq 2$ olarak alınacak ve teoremin her $k < n$ için geçerli olduğu varsayılacaktır.

$$D = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_n \end{bmatrix}, \quad u_1, u_2, \dots, u_n \in R,$$

determinantı 1 olan herhangi bir diyagonal matris olsun. Teorem 3.1.'in ispatında açıklandığı gibi, eğer $D, E_n(R)$ grubunun bazı elemanlarıyla sağdan veya soldan çarpılarak yapılan belirli elemanter matris operasyonları sonucunda D' matrisine dönüşüyorsa, D' matrisinin $E_n(R)$ altgrubunda olması, D matrisinin de aynı altgrubun içine düşmesini gerektirir.

Şimdi u_1 kere D 'nin birinci sütunu, ikinci sütuna eklenirse D matrisi

$$D_1 = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & u_n \end{bmatrix}$$

matrisine dönüşür. D singüler olmadığına göre, her $1 \leq i \leq n$ için u_i , R halkasında bir aritmetik birim elemanıdır. Dolayısıyla

$$u_1 x + u_1 = 1$$

denkleminin R halkasında x için bir çözümü bulunur. x kere D_1 'in ikinci sütunu, birinci sütununa eklenirse D_1 'den

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & \dots & 0 \\ xu_2 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

elde edilir. $(-xu_2)$ kere D_2 'nin birinci satırı, ikinci satıra eklenerek de

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2(1-xu_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix}$$

bulunur. Şimdi D_3 'ün ikinci satırı $(u_1 u_2)^{-1}$ ile çarpılarak birinci satırına eklendiğinde elde edilen matris

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_1 u_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

olur. D_4 'ün sağ alt köşesindeki $(n-1) \times (n-1)$

$$\begin{bmatrix} u_1 u_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & u_n \end{bmatrix}$$

diyagonal matrisi, $SL_{n-1}(R)$ grubunda olduğu için, induksiyon hipotezine göre bu matris $E_{n-1}(R)$ 'nin bir elemanıdır. Dolayısıyla $D_n \in E_n(R)$ olmaktadır. Bundan da, başta yapılan açıklamanın ışığında D matrisinin $E_n(R)$ grubunun içine düşmesi gerektiği sonucu ortaya çıkar.

K , herhangi bir komütatif halka olsun. Eğer $x \in K$ için, $x^3 - x$ elemanı bir aritmetik birim ise, o takdirde x elemanına bir *güçlü aritmetik birim* adı verilecektir. Bu koşul ise, x , $x-1$ ve $x+1$ elemanlarının üçünün de birer aritmetik birim elemanı olması koşulu ile aynı anlama gelir. Bir güçlü aritmetik birim elemanını içeren halkalar arasında aşağıdaki örnekler sayılabilir:

1. K , en az 4 elemanı olan bir cisim ise, K 'da bir güçlü aritmetik birim elemanı vardır. Çünkü eğer K 'nın karakteristiği 2 değilse, $x \in K$ için x , $x-1$ ve $x+1$ birbirlerinden farklı üç eleman olacaklardır. Halbuki, $K \neq GF(4)$ olduğuna göre, K cisminde en az 5 eleman vardır. 0 , 1 ve -1 'den farklı herhangi bir eleman da, bir güçlü aritmetik birim olmak zorundadır. Öte yandan, K 'nın karakteristiği 2 ise, o halde $x \in K$ için $x-1=x+1$ olacağından, 0 ve 1 'den farklı herhangi bir eleman, bir güçlü aritmetik birim olacaktır. Bunun için de K 'da en az 4 eleman bulunması yeterlidir.

2. \mathbb{Z}_n halkasında bir güçlü aritmetik birim olması için gerek ve yeter şart, n ile 6 'nın birbirlerine

asal olmalarıdır. Çünkü, x herhangi bir tamsayı ise, $x-1$, x veya $x+1$ tamsayılarının biri 3'e, en az biri de 2'ye bölüneceğinden, her x tamsayısı için

$$x^3 - x = (x-1)x(x+1) \equiv 0 \pmod{6}$$

yahut

$$x^3 \equiv x \pmod{6}$$

olmalıdır. Üstelik, $2^3 - 2 = 6$ eşitliğinden, n ile 6 birbirlerine asal ise, 2'nin bir güçlü aritmetik birim elemanı olması gerektiği ortadadır.

3. Eğer K , bir güçlü aritmetik birim elemanını içeren bir komütatif halka ise, K üzerindeki s değişkenli ($s \geq 1$) polinom halkası ile K üzerindeki s değişkenli ($s \geq 1$) kuvvet serileri halkası da birer güçlü aritmetik birim elemanına sahiptirler.

Bu arada, bir güçlü birim elemanını içermeyen komütatif halkalar arasında şunlar sayılabilir: Tamsayılar halkası; 6 ile n 'nin birbirlerine asal olmadıkları durumlarda \mathbb{Z}_n ; \mathbb{Z}_2 veya \mathbb{Z}_3 üzerindeki herhangi bir polinom halkası; \mathbb{Z}_2 veya \mathbb{Z}_3 üzerindeki herhangi bir grup halkası; $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, v.s.

Şimdi verilecek olan teorem, $n=3$ durumundaki kohomoloji hesabında güçlü aritmetik birim elemanlarının ne yararı olduğunu açıklayacaktır. Sonradan da bu teoremin kapsamı dışında kalan bazı özel halkalar, ayrı ayrı ele alınıp incelenecektir.

Teorem 3.4. R herhangi bir halka, K ise R 'nin komütatif bir althalkası olsun. Eğer K , bir güçlü aritmetik birim elemanını içeriyorsa, o zaman

$$H^1(E_3(R), R^3) = 0$$

olur.

İspat: $SL_3(K)$ grubunun diyagonal altgrubu H ile gösterilirse, Teorem 3.3.'e göre H , $E_n(R)$ 'ın bir altgrubu olur. $u \in K$, bir güçlü aritmetik birim elemanı ise o halde

$$A = \begin{bmatrix} u & & \\ & u & \\ & & u^{-2} \end{bmatrix} \in H$$

ve aynı zamanda da $(A-I) \in SL_3(K)$ olur*. A elemanı, H grubunun merkezinde olduğu için, Teorem 2.6.'ya göre $H^1(H, R^3) = 0$ sonucu elde edilir. Dolayısıyla, eğer $f \in \text{Der}(E_3(R), R^3)$ verilmişse, $f|_H$ olarak gösterilen f 'nin H 'ya kısıtlamasının sifıra eşit olduğu varsayılabilir.

$$B = \begin{bmatrix} u_1 & & \\ & u_2 & \\ & & u_3 \end{bmatrix} \in H$$

ise, her $i \neq j$ ve her $t \in R$ için

$$B x_{ij}(t) B^{-1} = x_{ij}(u_i t u_j^{-1}) \quad \dots (3.A)$$

olduğu aşikârdır. (3.17)'de $t=1$ ve $h_i=h_j=u$ olarak alınıp, $f|_H=0$ olduğu akılda tutularak bu bağıntıya f uygulanırsa,

* Bu bölümdeki matrislerde boş bırakılan yerlerin herbirinin sifıra eşit olduğu kabul edilecektir.

$$Bf(x_{ij}(1)) = f(x_{ij}(1)) \quad \dots (3.18)$$

bulunur. u bir güçlü aritmetik birim elemanı olduğuna göre, özdeğerleri u , u ve u^{-2} olan bu B matrisi için, $B-I$ matrisi singüler olmayacaktır. Dolayısıyla (3.18)'den $f(x_{ij}(1))=0$ sonucu ortaya çıkar. Şimdi (3.5) bağıntısında $t=1$ ve $i=k$ alınırsa, $j \neq k$, $i \neq \ell$ ve $s \in R$ için

$$E_{ij} f(x_{i\ell}(s)) = s E_{kl} f(x_{ij}(1)) = 0$$

olduğu görülür. Yani, $f(x_{i\ell}(s))$ 'nin, i 'inci koordinatı hariç her koordinatı sifıra eşittir. Sonuç 3.1.'e göre ise bu, $H^1(E_3(R), R^3)=0$ demektir.

Yukarıda belirtildiği gibi, n ile 6 aralarında asal değillerse, \mathbb{Z}_n halkası bir güçlü aritmetik birim elemanı içermemektedir. Onun için önce Teorem 3.4.'ün kapsamına girmeyen \mathbb{Z}_n halkalarının birçoğu için $H^1(E_3(\mathbb{Z}_n), \mathbb{Z}_n^3)$ grubunun ne olduğu sorusunu cevaplayan bir teorem verilecektir. K , komütatif bir halka ise, K 'daki aritmetik birim elemanlarının çarpma altında oluşturdukları grup, $U(K)$ ile gösterilsin.

Teorem 3.5. K herhangi bir komütatif halka olsun. Eğer $U(K)$ grubunda $u^2 \neq 1$ olan bir u elemanı bulunuyorsa, o zaman

$$H^1(E_3(K), K^3) = 0$$

olur.

İspat: $f \in \text{Der}(E_3(K), K^3)$ verilmişse, Sonuç 3.1.'e göre $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$ ve $t \in K$ için $f(x_{ij}(t))$ 'nin i 'inci koordinatı dışında bütün koordinatlarının sıfıra eşit olduğunu göstermek yeterlidir. $E_3(K)$ grubunun diyagonal alt grubu \mathbb{H} ile gösterilir ve f

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad f_i: E_3(K) \rightarrow K, \quad i=1, 2, 3$$

şeklinde koordinat fonksiyonları cinsinden ifade edilirse, herhangi iki

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & & \\ & u_2 & \\ & & u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{H} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} v_1 & & \\ & v_2 & \\ & & v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$$

alınıp, $AB=BA$ denkleminin iki yanına f uygulandığında, $u_i=1$ ise $f_i(A)=0$ olduğu görülür. Ayrıca (3.17)'den

$$A x_{ij}(t) = x_{ij}(u_i t u_j^{-1}) A$$

olduğu hatırlanırsa, bu bağıntıya f derivasyonunu uygulayarak $i=1, j=2$ için

$$u_1 f_1(x_{12}(t)) = u_1 t u_2^{-1} f_2(A) + f_1(x_{12}(u_1 t u_2^{-1})) \quad \dots (3.19)$$

$$u_2 f_2(x_{12}(t)) = f_2(x_{12}(u_1 t u_2^{-1})) \quad \dots (3.20)$$

$$u_2 f_3(x_{12}(t)) = f_3(x_{12}(u_1 t u_2^{-1})) \quad \dots (3.21)$$

bulunur. (3.20) bağıntısında $u_1=u_2=u$ alınarak, her $u \in U(K)$ için

$$u f_2(x_{12}(t)) = f_2(x_{12}(t)) \quad \dots (3.22)$$

elde edilir. $U(K)$ grubu triviyal olmadığına göre, 1'den farklı bir $u \in U(K)$ bulunacaktır. Dolayısıyla (3.22)'den her $t \in K$ için

$$f_2(x_{12}(t)) = 0 \quad \dots (3.23)$$

sonucu elde edilir.

Şimdi (3.21)'de $u_3 = u = u_1^{-1}$, $u_2 = 1$ alınarak

$$u f_3(x_{12}(t)) = f_3(x_{12}(u^{-1}t)), \quad \dots (3.24)$$

ve yine (3.21)'de $u_1 = 1$, $u_3 = u = u_2^{-1}$ alınarak da

$$u f_3(x_{12}(t)) = f_3(x_{12}(ut)) \quad \dots (3.25)$$

olduğu görülür. (3.24) ve (3.25)'ten çıkan sonuç ise

$$u f_3(x_{12}(t)) = u^{-1} f_3(x_{12}(t))$$

yani her $u \in U(K)$ için

$$u^2 f_3(x_{12}(t)) = f_3(x_{12}(t))$$

olduğudur. Baştaki hipoteze göre, $u^2 \neq 1$ olan bir aritmetik birim elemanı u bulunduğu için

$$f_3(x_{12}(t)) = 0 \quad \dots (3.26)$$

olmalıdır. Böylece (3.23) ve (3.26)'dan, $f(x_{12}(t))$ 'nin, birinci koordinatı dışında bütün koordinatlarının sıfıra eşit olduğu görülür. Halbuki bu ispat, herhangi bir $x_{ij}(t)$ için de geçerli olduğundan, istenilen sonuç elde edilmiş demektir.

Şimdi amaç, \mathbb{Z}_n halkalarının hangileri için $u^2 \neq 1$ olan bir $u \in U(\mathbb{Z}_n)$ bulunduğunu saptamaktır.

Teorem 3.6. Eğer \mathbb{Z}_n halkasındaki her aritmetik birim elemanı u , $u^2=1$ bağıntısını gerçekleştiriyorsa, o takdirde n , 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 veya 24'e eşittir.

İspat : Her $u \in U(\mathbb{Z}_n)$ için $u^2=1$ olduğu varsayılınsın. n tamsayısı asal çarpanlarına ayrılarak

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

olarak yazılabilir. Burada p_1, p_2, \dots, p_r 'nin birbirlerinden farklı asal sayılan oldukları ve her $1 \leq i \leq r$ için $k_i \geq 1$ olduğu kabul edilecektir. Komütatif grupların yapısı üzerindeki bir teoreme göre bundan

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \otimes \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}} \dots (3.27)$$

izomorfisi elde edilir. (Burada $H \otimes K$, H ve K gruplarının direkt çarpımını ifade etmektedir). (3.27)'den

$$U(\mathbb{Z}_n) \cong U(\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}}) \otimes U(\mathbb{Z}_{p_2^{k_2}}) \otimes \dots \otimes U(\mathbb{Z}_{p_r^{k_r}}) \dots (3.28)$$

olması gerektiği görülür. Eğer $\phi(m)$, Euler ϕ - fonksiyonunun n tamsayısı üzerindeki değerini gösteriyorsa, $U(\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}})$ grubunun mertebesi

$$\phi(p_i^{k_i}) = p_i^{k_i-1} (p_i-1) \quad \dots (3.29)$$

olur. Bundan da aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

1. Eğer $p_i > 2$ ise, $k_i = 1$ olmalıdır. Aksi takdirde (3.29)'a göre p_i , $U(\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}})$ grubunun mertebesini böleceğinden, (3.28) izomorfisine bakılarak $U(\mathbb{Z}_n)$ 'de mertebesi 2'den büyük bir eleman olması gerektiği sonucuna varılır ki, bu da baştaki hipoteze aykırıdır.

2. Eğer $p_i > 3$ ise, o zaman \mathbb{Z}_n grubunun direkt çarpanlarına ayrılmasında (3.27)'ye göre bir \mathbb{Z}_{p_i} direkt çarpanı bulunacağından, $U(\mathbb{Z}_n)$ grubunda mertebesi $p_i-1 > 2$ olan bir eleman elde edilir. Dolayısıyla, n tamsayısının asal çarpanları arasında 2 veya 3'ten başka bir asal sayının kuvveti bulunamaz.

3. Bu durumda n , $3 \cdot 2^k$ şeklinde bir sayıyı bölmelidir. Fakat $k \geq 4$ ise, $U(\mathbb{Z}_{2^k})$ grubunda 3 (daha doğrusu 3'ün kalan sınıfı), mertebesi 2'den fazla bir eleman olacaktır. Yani $k \leq 3$ 'tür. Bundan da

$$n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 \quad \dots (3.30)$$

veya 24

sayılarından başka çözüm olmadığı görülür. Gerçekten de (3.30)'da verilen her n değeri için, $U(\mathbb{Z}_n)$ grubunun her elemanının karesi 1'e eşittir.

$n=2$ veya 3 olduğunda \mathbb{Z}_n bir cisim olmaktadır, ve bu durumda McLaughlin'in bu teoremi'ne göre [3, 16] sonuç

$$H^1(SL_3(\mathbb{Z}_3), \mathbb{Z}_3^3) = 0$$

fakat

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(SL_3(\mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2^3) = 1$$

şeklindedir.

Bu sonuçlar, aşağıda özetlenmektedir:

Sonuç 3.2. i) $R=\mathbb{Z}_n$, $n \neq 2, 4, 6, 8, 12$ veya 24 ise,

$$H^1(E_3(R), R^3) = 0$$

sonucu geçerlidir.

ii) $R, i)$ 'deki halkalardan biri, S ise R üzerinde s değişkenli ($s \geq 1$) polinom halkası veya s değişkenli ($s \geq 1$) bir kuvvet serileri halkası ise,

$$H^1(E_3(S), S^3) = 0$$

olur.

iii) R , Gauss tamsayıları halkası ise,

$$H^1(E_3(R), R^3) = 0$$

olur.

İspat : Yalnızca iii)'ün ispatı kalmıştır; çünkü ii)'de, $U(S)$ grubu, $U(R)$ grubunu içerdiğinden, Teorem 3.5.'teki ispat, S halkası için de geçerli olmaktadır. iii) için ise, Gauss tamsayıları halkasındaki i aritmetik birim elemanının, $i^2 = -1 \neq 1$ bağıntısını gerçeklediğini söylemek yeterlidir.

Hakkında $n=3$ hali için henüz birşey söylenmemiş bir önemli halka, tamsayılar halkasıdır. Esasında Sah'ın iki teoremine göre [17, s. 276 ve s. 295], $n=2$ veya 3 olduğunda

$$H^1(SL_n(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^n) = 0$$

sonucu geçerlidir. Burada bu sonuçların ispatı farklı bir yöntemle yapılacak ve bundan da $n=2$ veya 3 durumunda tamsayılar halkası üzerinde kurulu polinom halkalarının kohomolojisinin de triviyal olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.7. Tamsayılar halkası için

$$i) \quad H^1(E_3(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^3) = 0 \quad \text{ve}$$

$$ii) \quad H^1(E_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2) = 0$$

sonuçları geçerlidir.

İspat : i) Önce, \mathbb{Z} bir Öklid halkası olduğuna göre, her $n \geq 1$ için $E_n(\mathbb{Z}) = SL_n(\mathbb{Z})$ olduğu Teorem 3.1. ile saptanmış durumdadır. Eğer $f \in \text{Der}(SL_3(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^3)$ verilmişse, f 'nin bir iç derivasyon olduğunu ispatlamak için f 'nin, $SL_3(\mathbb{Z})$ grubunu doğuran bir eleman kümesinde sifıra eşit olduğunu göstermek yeterlidir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

ise, $SL_3(\mathbb{Z})$ 'nin diyagonal altgrubu

$$H = \{I, A, B, C\},$$

Klein'in 4'lü grubuna izomorftur. f derivasyonu koordinat fonksiyonları cinsinden

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad f_i: SL_3(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad i=1, 2, 3$$

olarak ifade edilip

$$AB = BA = C$$

bağıntısına uygulanırsa, (2.4)'e göre

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(B) \\ f_2(B) \\ f_3(B) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(A) \\ f_2(A) \\ f_3(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(A) \\ f_2(A) \\ f_3(A) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(B) \\ f_2(B) \\ f_3(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(C) \\ f_2(C) \\ f_3(C) \end{bmatrix} \quad \dots (3.31)$$

bulunur. (3.31)'in satırlarına bakıldığında

$$f_1(A) = 0, \quad f_1(B) = f_1(C)$$

$$f_2(B) = 0, \quad f_2(A) = f_2(C)$$

$$f_3(C) = 0, \quad f_3(A) = f_3(B)$$

bağıntısının gerçekleştiği görülür. Buna göre

$$f(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix}, f(B) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix}, f(C) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}$$

olarak alınabilir. f derivasyonunun H altgrubuna kısıtlanmasının H üzerinde bir iç derivasyon olması, her $D \in H$ için

$$(f|_H)(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\beta \\ -2\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ve B ile C için de aynı tür hesaplar gözönüne alındığında $f|_H$ 'nin bir iç derivasyon olması için gerek ve yeter şartın, a, b ve c tamsayılarının herbirinin bir çiftsayı olması koşulu olduğu görülür.

Eğer $f|_H$ bir iç derivasyon ise, $f|_H=0$ olarak alınabilir (çünkü $f|_H$ 'ya bir iç derivasyon eklemek, f 'nin kohomoloji grubundaki kalan sınıfını etkilemeyecektir). O zaman $f|_H=0$ kabul edilip

$$C x_{12}(t) = x_{12}(t) C \quad \dots (3.32)$$

bağıntısına f uygulanırsa

$$(C-I)f(x_{12}(t)) = 0,$$

bundan da

$$f(x_{12}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta(t) \end{bmatrix}, \zeta(t) \in \mathbb{Z}$$

şeklinde bir ifade elde edilebileceği açıktır.

$$x_{12}(t)x_{12}(s) = x_{12}(t+s), \quad s, t \in \mathbb{Z}$$

bağıntısından ise, $\zeta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tasvirinin her $t, s \in \mathbb{Z}$ için

$$\zeta(t) + \zeta(s) = \zeta(t+s) \quad \dots (3.33)$$

bağıntısının gerçekleştiği görülür. Benzer hesaplar sonucu

$$f(x_{23}(t)) = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f(x_{13}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabileceği ve üstelik ξ ve η tasvirlerinin de (3.33)'ye benzer bağıntıları gerçekledikleri, yahut başka bir deyişle, tamsayılar grubu üzerinde birer homomorfi oldukları aşikârdır.

Lemma 3.1. ii)de verilen

$$x_{12}(t)x_{23}(s)x_{12}(-t)x_{23}(-s) = x_{13}(st)$$

bağıntısına (3.8) kuralına göre f uygulanırsa her $s, t \in \mathbb{Z}$ için

$$\xi(s) + \xi(-s) + st\zeta(-t) = 0 \quad \dots (3.34)$$

$$s \zeta(-t) = \eta(st) \quad \dots (3.35)$$

elde edilir. Yukarıdaki açıklamaya göre ξ tasviri bir homomorfi olduğu için, (3.34)'ten her $t \in \mathbb{Z}$ için $\zeta(t) = 0$ olması gerektiği ortaya çıkar. Bu defa (3.35)'ten her $t \in \mathbb{Z}$ için $\eta(t) = 0$ elde edilir. Benzer bir hesaplama, ξ tasvirinin de sifıra eşit olduğu görülür. $x_{12}(t)$, $x_{23}(t)$ ve $x_{13}(t)$ matrisleri, $SL_3(\mathbb{Z})$ grubunun üst üçgen grubunu doğrudukları için buna göre f , bütün üst üçgen matrisler üzerinde sifıra eşittir. Simetriye göre aynı f , alt üçgen matrisler üzerinde de aynı olmalıdır. Böylece, eğer $f|_{\mathbb{H}}$ bir iç derivasyon ise, f 'nin tümünün bir iç derivasyon olacağı sonucu elde edilir.

Şimdi $f \in \text{Der}(SL_3(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^3)$, herhangi bir derivasyon olsun. (3.32) bağıntısına f uygulanırsa, ilk koordinatlara bakılarak her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$2f_1(x_{12}(t)) = tb$$

olduğu görülür. Bundan, b 'nin bir çiftsayı olması gerektiği aşikârdır. Aynı şekilde

$$A x_{23}(t) = x_{23}(t)A \quad \text{ve}$$

$$C x_{21}(t) = x_{21}(t)C$$

bağıntılarından da a ve c tamsayılarının çift olmaları gerektiği görülür. Yani, her $f \in \text{Der}(SL_3(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^3)$ için, $f|_{\mathbb{H}}$, bir iç derivasyon olmaya mecburdur. Halbuki $f|_{\mathbb{H}}$ 'nin bir iç derivasyon olduğu halde teoremin ispatı yukarıda verilmiştir.

ii) Yine $f \in \text{Der}(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2)$, herhangi bir derivasyon ise,

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad f_i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad i=1, 2$$

olarak koordinat fonksiyonlarına ayrılabilir.

$$x_{12}(t)x_{12}(s) = x_{12}(s)x_{12}(t) = x_{12}(s+t)$$

bağıntısına f uygulanırsa, (2.4) kuralından her $t, s \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} & f_1(x_{12}(s)) + f_1(x_{12}(t)) + t f_2(x_{12}(s)) \\ &= f_1(x_{12}(s)) + f_1(x_{12}(t)) + t f_2(x_{12}(t)) \\ &= f_1(x_{12}(s+t)) \end{aligned} \quad \dots (3.36)$$

ve

$$f_2(x_{12}(t)) + f_2(x_{12}(s)) = f_2(x_{12}(t+s)) \quad \dots (3.37)$$

bağıntılarının gerçekleştiği görülür. (3.36)'ya göre ise, her $t, s \in \mathbb{Z}$ için

$$t f_2(x_{12}(s)) = s f_2(x_{12}(t)) \quad \dots (3.38)$$

bulunur. Eğer $f_2(1) = \xi$ denirse, (3.38)'den her s tamsayısı için

$$f_2(x_{12}(s)) = s\xi$$

bağıntısı elde edilir.

Öte yandan, eğer

$$f(-1) = f \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

olarak alınır, bu defa

$$x_{12}(t)(-I) = (-I)x_{12}(t)$$

bağıntısına f uygulanarak, her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\alpha + t\beta + f_1(x_{12}(t)) = -f_1(x_{12}(t)) + \alpha \quad \dots (3.39)$$

$$\beta + f_2(x_{12}(t)) = -f_2(x_{12}(t)) + \beta \quad \dots (3.40)$$

olduğu görülür. (3.40)'a göre her t için

$$2f_2(x_{12}(t)) = 0$$

olacağından, $f_2(x_{12}(t))=0$ elde edilir. (3.39)'dan ise her t tamsayısı için

$$2f_1(x_{12}(t)) = -t\beta, \quad \dots (3.41)$$

yani β 'nin bir çiftsayı olduğu sonucu çıkar.

Benzer bir yöntem kullanılarak

$$x_{21}(s)(-I) = (-I)x_{21}(s)$$

eşitliğinden de α 'nın bir çiftsayı olması gerektiği anlaşılır. Eğer

$$\alpha = -2a, \quad \beta = -2b, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

olarak ifade edilirse, o takdirde

$$f \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a \\ -2b \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \dots (3.42)$$

olur. Eğer $\mathbb{H} = \{-1, 1\}$, $SL_2(\mathbb{Z})$ 'nin diyagonal altgrubunu gösteriyorsa, (3.42)'e göre $f|_{\mathbb{H}}$ bir iç derivasyon demektir. i) kısmının ispatında olduğu gibi, $f|_{\mathbb{H}}=0$ olduğu kabul edilebilir; yani $\alpha=\beta=0$ olduğu varsayılabilir. O zaman (3.41)'e göre

$$f_1(x_{12}(t)) = 0$$

ve aynı şekilde

$$f_2(x_{21}(s)) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla f , $SL_2(\mathbb{Z})$ 'nin alt ve üst üçgen grupları üzerinde sifıra eşittir. $SL_2(\mathbb{Z})$, bu gruplar tarafından doğurulduğu için de f , tüm özel lineer grup üzerinde sıfır olacaktır. Bu da, $H^1(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}^2) = 0$ demektir.

Eğer R , tamsayılar halkası üzerindeki s değişkenli ($s \geq 1$) bir polinom halkası veya s değişkenli ($s \geq 1$) bir kuvvet serileri halkası ise, o zaman R 'deki aritmetik birim elemanları ile tamsayılar halkasındaki aritmetik birim elemanlarının aynı olması dolayısıyla, $SL_n(\mathbb{Z})$ 'nin diyagonal altgrubu ile $E_n(R)$ 'nin diyagonal altgrubu aynıdır. Bu durumda ise Teorem 3.7.'de verilen ispat, yukarıda bahsedilen R halkaları için de geçerli olmaktadır. Bu da aşağıdaki sonuçta özetlenmektedir.

Sonuç 3.3. R , tamsayılar halkası üzerindeki s değişkenli ($s \geq 1$) bir polinom halkası veya s değişkenli ($s \geq 1$) bir kuvvet serileri halkası ise, o takdirde $n = 2$ ve 3 için

$$H^1(E_n(R), R^n) = 0$$

sonuçları geçerlidir.

İspat : Yukarıda açıklandığı üzere, Teorem 3.7.'nin ispatı bu halkalar için de aynen geçerli olmaktadır.

IV KAYNAKLAR

- [1] Avrunin, S.G., "Second Degree Cohomology of Groups of Lie Type", Doktora Tezi, The University of Michigan (1976).
- [2] Avrunin, S.G., "A Vanishing Theorem for Second Degree Cohomology", *Jour. Alg.* 53 (1978) 382-388.
- [3] Bell, G.W., "On the Cohomology of the Finite Special Linear Groups, I", *Jour. Alg.* 54 (1978), 216-238.
- [4] Bell, G.W., "On the Cohomology of the Finite Special Linear Groups, II", *Jour. Alg.* 54, (1978), 239-259.
- [5] Bell, G.W., "Cohomology of Degree 1 and 2 of Some Chevalley Groups", Doktora Tezi, The University of Michigan (1976).
- [6] Cline, S.E., Parshall, B. ve Scott, L., "Cohomology of Finite Groups of Lie Type, I", *IHES* 45 (1975) 169-191.
- [7] Fossum, R.M. ve Griffith, P.A., "Complete Local Factorial Rings Which are not Cohen-Macaulay in Characteristic p ", *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e série, t.8 (1975) 189-200.
- [8] Griess, R., "Schur Multipliers of the Known Finite Simple Groups", *Bull. Amer. Math. Soc.* 78 (1972), 68-71.
- [9] Gruenberg, K.W., *Cohomological Topics in Group Theory*, Springer-Verlag (1970).
- [10] Hilton, P.J. ve Stammach, U., *A Course in Homological Algebra*, Springer - Verlag (1970).
- [11] Jones, W. ve Parshall, B., Cohomology of Finite Groups of Lie Type, "Proceedings of the Conference on Finite Groups", ed. by L. Scott ve F. Gross, Academic Press (1976).
- [12] Küsefoğlu, A.S., "The Second Degree of Cohomology of Finite Orthogonal Groups", Doktora Tezi, The University of Michigan (1976).
- [13] Küsefoğlu, A.S., "The Cohomology of Finite Orthogonal Groups, I", *Jour. Alg.* 56 (1979), 207-220.

- [14] Landazuri, V., "The Second Degree Cohomology of Finite Chevalley Groups", Doktora Tezi, The University of Michigan (1975).
- [15] Litoff, O., "On the Commutator Subgroup of the General Linear Group", *Proc. AMS* 6, (1955), 465-470.
- [16] McLaughlin, J.E., Lecture Notes, The University of Michigan (1975).
- [17] Sah, C.H., "Cohomology of Split Group Extensions, I", *Jour. Alg.* 29 (1974), 255-302.
- [18] Sah, C.H., "Cohomology of Split Group Extensions, II", *Jour. Alg.* 45. (1977), 17-68.
- [19] Steinberg, R., *Lectures on Chevalley Groups*, Yale University, Department of Mathematics (1968).